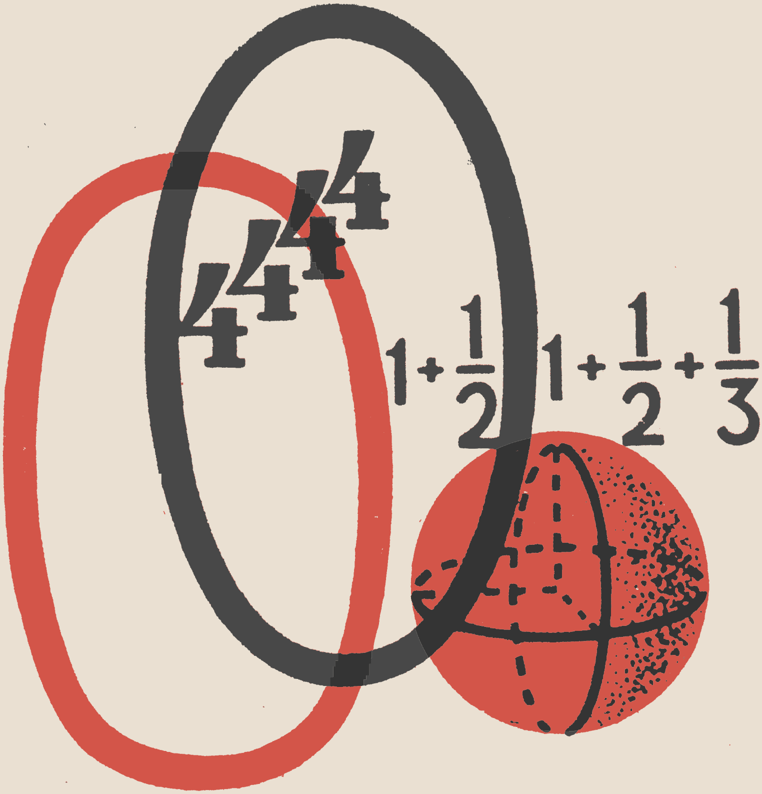
Серия 9 Физика Математика Астрономия 1965



А. Ф. Никифоров

Математический анализ

3

Новое в жизни науке технике

А. Ф. Никифоров,
лауреат Ленинской премии

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Издательство «Знание»
Москва — 1965

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ

Многим знакома хвастливая реплика опереточного персонажа: «Я могу выпить шампанского сколько угодно и еще одну бутылку!» Но далеко не все из тех, кто слышал эти слова, подозревают, что весьма сходное убеждение заложено в основе математического анализа.

Дифференциальное исчисление неразрывно связано с понятием бесконечности. Термин «бесконечность» известен всем нам с детства, но вот его содержание как-то всегда ускользало от нашей мысли. Думая о бесконечности, мы, как правило, лишь скользили вблизи поверхности таинственного и темного мира. Если хотелось все же охватить воображением этот мир, то становилось не по себе. Удивление, восторг и даже страх вселяло в нас раздумье о бесконечности философов.

В математическом анализе, однако, термин «бесконечность» имеет совершенно ясный и четкий смысл. Нет ничего «трансцендентного» в содержании этого термина, и математиков не грызет совесть за то, что они употребляют понятие, лежащее за пределами нашего чувственного мира. Хотите тоже «освоить» математическую бесконечность? Тогда скажите: верите ли вы в то, что если я напишу на бумаге какое-то число, то вы сможете написать еще большее?

Наверное, верите. Вам понятно, что к любому, сколь угодно огромному числу, можно прибавить единицу. Тогда вы понимаете, что такое математическая бесконечность.

Это, во-первых, величина движущаяся, не застывшая, меняющаяся, развивающаяся, динамическая. Она может быть сначала даже очень маленькой, но в процессе роста разбухать до любых размеров. Таким образом, это способность становиться больше всякой заранее указанной величины.

Во-вторых, бесконечность анализа — это идеализация. Приходил предел возможностям всех людей и всех обществ. И если я в течение пятидесяти лет буду день за днем писать на колоссальном листе бумаги число-левиафан, то добьюсь наконец того, что вы уже не сможете написать числа, превосходящего мое. Нет ни одного конкретного процесса, который мог бы продолжаться дольше миллионов, миллиардов или триллионов лет. Но математика это не смущает — его наука оперирует не реальными объектами, а сгустками их некоторых свойств или тенденций, как бы упрощенными до элементарности чертами вещей. Раз есть процессы, которые могут протекать очень долго, и есть величины, которые способны возрастать до очень больших значений, то для удобства исследования следует ввести в рассмотрение воображаемые переменные, которые увеличиваются до каких угодно размеров. В сущности такая идеализация означает просто, что мы не интересуемся тем далеким моментом, когда настанет предел возможности роста, оставляем этот предел вне нашего рассмотрения.

Очень многие недоразумения связаны именно с тем, что распространено недопонимание идеализированной природы математической бесконечности. Никто же не сокрушается о своем невежестве, когда говорят об угле ровно в шестьдесят градусов, хотя такой угол реально не существует и построить его невозможно. Но услышав термин анализа «бесконечность», люди часто начинают ныть: мне этого никогда не постигнуть! Повторяем: для математика «бесконечность» означает «то, что лежит за пределами интересующей нас области».

В одной немецкой книжке, трактующей об анализе, приводится очень запоминающийся пример. «Что такое бесконечность?» — вопрошал автор и начинал подходить к объяснению этого понятия издалека. Возьмем число 2^2, говорил он. Это будет, разумеется, 4. Следующее число сконструируем так:

$$3^{3^{3}}$$

Это уже получится много больше четырех $3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$. Семь триллионов! Но все же это совершеннейшая былинка перед следующим числом такого типа, которое состоит из четырех четверок, записанных в степени друг у друга. Вычислить точное значение числа

$$4^{4^{4^{4}}}$$

немыслимо, даже если объединить усилия всего человечества. Однако приблизительное представление о размерах этого числа можно дать таким образом.

Возьмем мысленно сферу с поперечником в триллион триллионов световых лет и наполним эту сферу типографской краской. Так вот, этой краски не хватит, чтобы... напечатать наше число самым мелким из существующих шрифтов!

После этого удивительно яркого образа автор переходил к следующему числу ряда — к пяти пятеркам в степенях одна за другой. Переходил и тут же объявлял капитуляцию — говорил, что даже не знает, как приступить к описанию этого числа. И весь этот фейерверк гигантов понадобился ему только для того, чтобы в заключение патетически воскликнуть: «Но все эти числа — совершеннейшее ничто по сравнению с бесконечностью!».

Отдавая должное остроумию популяризатора, нельзя все же не подивиться наивному, прямолинейному, чересчур серьезному отношению к явной математической абстракции. Есть ли резон глубокомысленно рассуждать о величине, намного превышающей не только любую реальную меру Вселенной, но и становящейся неизмеримо больше неосязаемого числа, которое даже миллиарды поколений людей не смогут записать в обычной позиционной системе?

Математика математикой, но нельзя терять чувство действительности, фетишизировать идеализации, сделанные для упрощения решения той или иной проблемы и начинать видеть в этих идеализациях что-то объективно существующее. В исследованиях графиков, например, бесконечностью чаще всего называют то, что находится на оси абсцисс дальше пяти или десяти. И никто при этом не пускается в рассуждения о бренности всего земного.

Те же или похожие слова можно сказать насчет понятия бесконечно малой. Эта переменная величина становится как угодно малой. Что значит «как угодно»? Идеализированно, математически это значит — меньше любой заранее заданной малой величины, или «достаточно малой, малой до такой степени, что дальнейшее уменьшение нас не интересует».

Подытоживая сказанное, можно утверждать, что основными объектами анализа являются воображаемые величины, которым приписывается способность неограниченно уменьшаться или увеличиваться. Никогда в анализе мы конкретно не уменьшаем нашу величину дальше какого-то (часто довольно-таки крупного) предела и не увеличиваем величину выше определенной границы. Важно не это, главное — считать, что при необходимости переменную можно уменьшить или увеличить еще дальше. Введение в математику такого рода величин явилось настоящей революцией — ведь до этого рассматривались лишь «закостеневшие» объекты — числа, углы, нарисованные на бумаге линии и точки. Вместе с бесконечно большими и бесконечно малыми в науку вошла динамика, непрерывное отрицание и утверждение. Это сразу же дало богатые плоды.

Первый из плодов — предел. Этим термином в анализе обозначают очень важное понятие, которое мы поясним на примере касательной.

Все представляют себе, что такое касательная. Но математика должна опираться на четкие определения. Вы, наверное, уверены, что вам удастся при желании сформулировать свою идею касательной строго. Попробуйте! Искренне желаем вам успеха, но послушайте, что отвечали довольно хорошие студенты технического вуза.

Ответ первый (не подумав): касательная — это такая прямая, которая имеет одну общую точку с данной кривой.

В качестве опровержения в ответ молча рисуется на доске такая картинка (рис. 1):

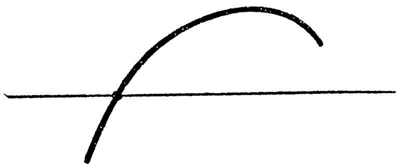


Рис. 1.

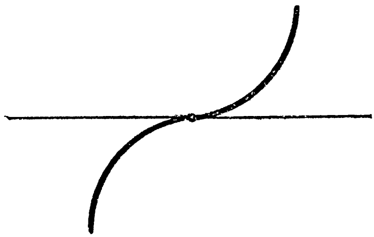


Рис. 2.

Смущенный студент краснеет и, желая исправиться, снова не подумав как следует, дает ответ второй: это такая прямая, которая имеет общую точку с данной прямой и проходит по одну сторону от этой прямой.

Опять в ответ приводится рисунок 2.

Здесь прямая явно служит касательной, и в то же время пересекает кривую, то есть проходит по обе ее стороны вблизи точки касания.

Теперь уже студент задумывается по-серьезному. Вызывая в своем воображении различные случаи касательных (а он, без сомнения, в любом конкретном случае может сказать, является ли данная прямая касательной или нет), он старается уловить то общее, что им присуще, и сформулировать это общее свойство. Так рождается верный ответ: касательная — это предельное положение секущей. Ответ показывает, насколько глубоко вошли в сознание студента категории математического анализа. Человек сказал «предельное положение» и даже не потрудился разъяснить, что это значит, ибо

Рис 3.

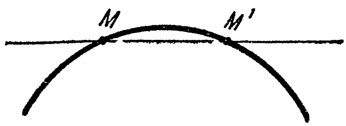


Рис 4.

ему кажется все здесь очевидным и для него самого, и для его собеседника. А ведь в это время в мозгу его произошел удивительнейший процесс обобщения и идеализации, состоявший примерно в следующем:

1. Он представил себе секущую, проходящую через ту точку M, в которой нужно построить касательную, и через какую-то соседнюю точку M^1 (произвольную). Раз есть две точки, то через них пройдет единственная прямая (рис. 3).

2. Оставляя на месте точку M, он подвинул поближе к ней точку M^1. Секущая при этом повернулась и приняла положение, которое уже больше понравится любому, кто хочет нарисовать касательную (рис. 4).

3. После этого мысль уже знает, в каком направлении идти. Третий этап развивает предыдущую тенденцию — точка M^1 берется еще ближе к точке M (рис. 5).

4. Что же делать дальше? Ведь для построения прямой нам всегда необходимы две точки. Но при любом, как угодно близком расположении к M точки M^1 прямая будет не касательной, а секущей. Значит, касательную нарисовать невозможно? Разумеется. Но мы всегда в силах нарисовать секущую, как угодно близкую к касательной. Чувствуете, как сильно проявляется здесь влияние основного убеждения анализа, что в любом процессе можно сделать следующий шаг? Практически мы сумеем начертить лишь довольно грубые секущие. Если, например, расстояние между точками M и M^1 будет равно одному микрону, то уже ничего не выйдет — ни карандашей таких тонких нет, ни таких ровных линеек, да и глаз наш подведет — но это не смущает нас, ибо мы ухватываем идею процесса и сразу же идеализируем его. Результат идеализации — недостижимое практически предельное положение секущей — касательная. Воображаемая прямая, которая, тем не менее, служит вполне реальным целям.

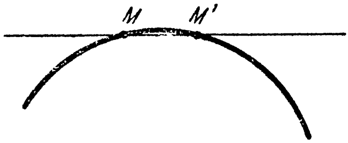


Рис. 5

Нет смысла в дальнейшем еще раз подчеркивать фиктивность, нереализуемость понятий анализа. Вся математика является абстракцией соотношений действительного мира. Абстракции могут быть бесплодными, надуманными — тогда они бесполезны. Абстрагированные же объекты математического анализа впитывают в себя важнейшие свойства процессов, происходящих на самом деле (свойство процесса продолжаться и т. д.), и не отражают других его свойств (свойство процесса останавливаться), чтобы не хвататься сразу за все, а вести исследование от простого к более сложному. Поэтому эти объекты помогают людям изучать реальный мир и взаимодействия тел, происходящие в нем. И раз уж мы начали разговор о такой обобщающей науке, как анализ, то будем все время подразумевать идеальность ее категорий, говоря о них как о реально существующих.

Мы видели сейчас, как секущая движется к своему пределу — касательной. Переменная числовая величина тоже может иметь предел — он будет, конечно, постоянным числом. Предел, например, имеет общий член убывающей геометрической прогрессии

$$1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/16,\ 1/32,\ 1/64,\ 1/128...$$

Если ввести переменную величину, которая последовательно принимает выписанные значения, то она будет бесконечно малой — ее пределом окажется нуль.

Пределом последовательности может быть и не нуль, а другое число. Вот пример такой последовательности:

$$2;\ 1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ 1{,}0001;\ 1{,}00001...$$

Мы сделали простую вещь: к постоянному числу единица прибавили бесконечно малую величину, пробегающую значения членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 0,1. Естественно, что предел сконструированной таким образом последовательности оказался равным единице. По такому же принципу можно создать переменную с любым заранее заданным пределом.

Но не всякая последовательность имеет обязательно предел. Она может, к примеру, стремиться к бесконечности, т. е. неограниченно возрастать, как всякая арифметическая прогрессия с положительной разностью, или же вообще не иметь выраженной тенденции в своем стремлении, как эта последовательность:

$$1;\ 2;\ 3;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 0{,}7;\ 0{,}8...$$

Однако анализ рассматривает большей частью именно те последовательности, которые имеют предел или же являются бесконечно большими. Особенно важны величины, обладающие конечным пределом. Но как узнать, есть у данной последовательности предел или нет? Приведенные выше случаи были простыми, а как быть, скажем, в таком:

$$1;\ 1+1/2;\ 1+1/2+1/3;\ 1+1/2+1/3+1/4...?$$

или в таком:

$$2;\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3;\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^4;\ \left(1+\frac{1}{5}\right)^5;\ \left(1+\frac{1}{6}\right)^6...?$$

А иногда необходимо знать, имеет ли последовательность какой-то предел. Не находить этот предел, а именно только знать, существует он, или нет.

Здесь помогает замечательная теорема, которая для человека, мыслящего категориями анализа, кажется столь же очевидной, как существование касательной, но на самом деле несет в себе целый мир абстракции, идеализации и обобщения — удивительный, призрачный и вместе с тем так похожий на живой, мир чистой мысли. Вот эта теорема:

«Если последовательность монотонно возрастает, но при этом остается ограниченной постоянной границей, то она имеет предел».

Вообразите себя на берегу озера. Лето, жара, полный штиль. Вода — как зеркало, на ней ни рябинки. Вы лежите у самого берега и у ваших ног на плаву стоит легонькая байдарка. Неудачное движение, толчок — и байдарка медленно начала отплывать от берега. В первый момент у вас возникает импульс встать и вернуть лодку, но солнечные лучи располагают к лени. «Успею,— думаете вы.— Надо еще сначала прикинуть, далеко ли она может отплыть при таком спокойствии».

Вам становится ясно, что скорость лодки будет непрерывно убывать, ибо действует сила сопротивления воды. Но сила эта пропорциональна скорости, следовательно, она тоже будет убывать. Возникнет любопытная ситуация: замедление лодки будет все время уменьшаться вместе со скоростью. Значит, скорость никогда не станет равной нулю, ибо когда ее значение достигнет величины в одну миллионную долю миллиметра в год, то сила сопротивления станет равной почти нулю и крошечная скорость практически будет сохраняться. Если бы фараон Рамзес Второй толкнул описанным образом лодку на спокойном озере, то эта лодка двигалась бы до сих пор! Значит ли это, что лодка уплывет как угодно далеко, т. е. пройденный ею путь будет бесконечно большой величиной?

Ответ на этот вопрос мы получим с помощью такого рассуждения.

Уменьшение скорости пропорционально самой скорости (ибо замедляющая сила пропорциональна скорости). Это означает, что отношение уменьшения скорости к самой скорости есть величина постоянная, или же, другими словами, за каждую единицу времени скорость уменьшается в одно и то же число раз. Допустим, что за всякую секунду скорость лодки уменьшается на одну десятую своей величины. Значит, значения скоростей лодки в первую, вторую, третью и т. д. секунды составят последовательность:

$$v_0;\ v_0\cdot\frac{9}{10};\ v_0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2;\ v_0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3;\ v_0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^4;\ldots$$

(здесь v_0 — скорость в первую секунду). Но тогда проходимые за каждую секунду пути будут численно равны этим же значениям, ибо путь измеряется скоростью, умноженной на время в секундах. Так получится последовательность путей, пройденных лодкой к концу первой секунды, к концу второй секунды и т. д.:

v_0; $v_0\cdot(1+0{,}9)$; $v_0\cdot(1+0{,}9+0{,}9^2)$; $v_0\cdot(1+0{,}9+0{,}9^2+0{,}9^3)$; ...

Уйдет ли лодка в бесконечность — это зависит от поведения суммы, стоящей в скобках. Но ее можно преобразовать по известной формуле алгебры:

$$v_0(1+0{,}9+0{,}9^2+\dots+0{,}9^n) = v_0 \frac{1-0{,}9^{n+1}}{1-0{,}9} = 10 \cdot v_0 \cdot (1-0{,}9^{n+1}).$$

Такая запись свидетельствует наглядно о том, что ни при каком числе секунд лодка не уйдет от берега дальше, чем на $10 \cdot v_0$ единиц длины. Вместе с тем лодка непрерывно движется, т. е. пройденный ею путь является монотонно возрастающей функцией. Значит, по нашей теореме, движение лодки направлено к какому-то пределу, им служит некоторая точка на поверхности озера. Если в эту точку положить щепку, то с течением времени расстояние между лодкой и щепкой будет становиться все меньше и меньше — оно будет стремиться к нулю.

ФУНКЦИЯ — ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

Мы говорили об одной переменной величине. Но математику главным образом интересуют случаи, когда имеются две переменные величины, значения которых связаны с помощью определенного закона. Это случай функциональной зависимости двух переменных. Киньте беглый взгляд вокруг и всюду, вы найдете десятки примеров функциональной связи. Нагрев почвы зависит от угла поднятия солнца над горизонтом; скорость автомобиля зависит от темпа расходования горючего; качество картинки на экране телевизора зависит от угла, образованного направлением на телецентр и рейкой антенны; громкость стука бросаемого кровельщиком толя зависит от веса куска толя; вежливость продавцов магазина зависит от отдаленности конца их рабочего дня; длина очереди, выстроившейся у парикмахерской, зависит от близости праздничных дней; величина капель, падающих из крана самовара, зависит от температуры воды; срок износа мотора зависит от технологии обработки деталей; летные качества самолета зависят от его формы; непотопляемость судна зависит от расстояния между центром тяжести и метацентром...

Мы живем в мире функциональных соотношений. Все, что нас окружает,— это функции. Вот бы научиться их исследовать! Декарт свел функции к кривым, а Ньютон, Лейбниц и их последователи, использовав идеи Декарта, дали свои, чрезвычайно мощные методы рассмотрения функциональных зависимостей. Эти методы, хотя и возникли на базе геометрических представлений и зачастую служат геометрии, все же должны быть названы аналитическими. Отсюда и название «математический анализ». Производя исследование функции с помощью дифференциального исчисления, вы не обязаны что-либо рисовать, а можете ограничиться лишь покрытием листа бумаги математическими символами. При этом вы окунетесь уже в мир воображаемых функций, которые представляют лишь одно свойство реальных функциональных связей природы: каждому значению одной переменной величины соответствует определенное значение другой переменной величины.

Такое простое определение (а в математике не должно быть сложных определений, ибо эта наука ведет от изучения элементарного к изучению составного) приводит к тому, что в анализе появляются не только «нормальные» функции, похожие на те, которые проявляются вокруг нас, но и функции-уроды, некие химеры, неправдоподобные и удивительные создания чистой логики.

Но прежде всего посмотрим, каковы могут быть значения величин, связанных функциональной зависимостью.

Прежде всего, конечно, значения могут быть целыми числами. Что такое целое число? — может спросить иной читатель, желая иметь для всего точные определения. Помочь мы в этом случае бессильны. Понятие целого, вернее, натурального (положительного целого) числа не определяется и не сводится к другим, более простым понятиям. Что такое натуральные числа, мы все знаем с раннего детства и этого знания достаточно — математика ничего не может к нему прибавить.

Ньютон родился в 1643 году. Будем считать первые две цифры этой даты двумя значениями одной переменной, а две последние — значениями другой переменной. Соответствие установим такое: если $x = 1$, то $y = 4$; если $x = 6$, то $y = 3$. Мы получили самую настоящую функцию — неважно, что у нее только два значения. Она полностью подходит под данное выше определение.

На базе целых чисел можно сконструировать рациональные числа — отношения двух целых чисел. Скажем, если год рождения Ньютона поделить на год издания этой брошюры, то получится рациональное число 1643/1965. Рациональных чисел, так же, как и целых, бесчисленное множество. На первый взгляд кажется, что рациональных чисел все же больше, чем целых. Оказывается, однако, что количество тех и других одинаково. Чтобы утверждать это, нужно иметь способ сравнивать между собою бесконечные множества и судить, какое из этих множеств «более мощное». Такой способ есть и он очень прост. В самом деле, вспомним, как мы сравниваем между собой количества конечных множеств, как, например, мы устанавливаем, кого в зале больше — мужчин или женщин. Можно посчитать отдельно число женщин, потом число мужчин и сравнить результаты между собою. Но есть и другой путь: объявим танец и попросим образовать пары. Если останутся мужчины — значит их больше, если некоторым дамам не хватит кавалеров, значит мужчин меньше. Наконец, может случиться так, что танцевать будут все — тогда можно быть уверенным, что количества мужчин и женщин одинаковы.

Бесконечность нельзя пересчитать. Но два бесконечных множества можно сравнить между собой, пытаясь установить взаимно однозначное соответствие элементов. Если можно каждому элементу первого множества соотнести вполне определенный элемент второго и при этом ни один элемент второго множества не будет пропущен (т. е. заведомо будет существовать обратное соответствие), то мы вправе утверждать, что наши два множества равномощны.

Бесконечное множество целых чисел и бесконечное же множество всех дробей совершенно одинаковы по своей мощности. Такой парадоксальный результат можно сделать очевидным для любого скептика. Только сначала нужно уговориться брать лишь несократимые дроби — иначе одно и то же рациональное число будет появляться бесчисленное количество раз под разными масками, например, 27/37 вынырнет второй раз как 54/74, потом как 81/111 и т. д. После сделанной оговорки можно все рациональные числа расположить в таблицу, руководствуясь, скажем, таким принципом: в верхней строке будут стоять дроби со знаменателем 1 (это будут, конечно, целые числа, но они являются частным случаем рациональных чисел), причем числители будут возрастать слева направо; во второй строке мы напишем дроби со знаменателем 2 и снова с возрастающими числителями; строкой ниже — все дроби со знаменателем 3 и так до бесконечности. Таблица, разумеется, получится не ограниченной ни справа, ни снизу. Написать ее всю невозможно, но нетрудно показать ее кусок, который сразу пояснит закономерность ее составления:

1	2	3	4	5	6	. . .
1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	. . .
1/3	2/3	4/3	5/3	7/3	8/3	. . .
1/4	3/4	5/4	7/4	9/4	11/4	. . .
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	

Как видно, мы пропускаем все сократимые дроби, чтобы одни и те же числа не входили в таблицу несколько раз. При данном способе составления таблицы мы не пропустим ни одного рационального числа. Говоря по-другому, в этой таблице (если бы ее можно было написать целиком!) содержатся все рациональные числа. Можно ли поставить множество элементов этой таблицы во взаимно однозначное соответствие с рядом целых чисел, т. е. занумеровать рациональные числа таким способом, чтобы хватило номеров и ни одно рациональное число не было пропущено?

Способ этот существует и он очень несложен. Начнем нумерацию с левого верхнего угла таблицы и затем продолжим ее челночным ходом — подобно движению челнока, натягивающего диагональную основу ткани. Номера в этом случае расположатся так:

1	2	6	7	15
3	5	8	14	
4	9	13		
10	12			
11				

Совершенно очевидно, что при нашей системе нумерации всякое рациональное число получит свой собственный номер, т. е. множество рациональных чисел отобразится, притом взаимно однозначно, на множество целых чисел (мы говорим все время о положительных числах). Можно сказать и так: количество элементов в приведенной выше таблице такое же, как и количество элементов в единственной строчке целых чисел,— мы ведь убедились, что эта строчка, изогнувшись, покрывает всю таблицу без остатка.

Итак, дробей столько же, сколько и целых чисел. А существуют ли какие-либо числа, кроме рациональных или целых?

Геометрия говорит, что существуют. А с геометрией анализ не может не считаться, ибо он и родился от геометрии и в значительной степени служит ей.

Учение об измерении длин отрезков приводит к числам, которые нельзя выразить частным от деления двух целых чисел, то есть сократимой или несократимой дробью. Вот, скажем, диагональ квадрата со стороной единица. По теореме Пифагора ее длина измеряется числом, квадрат которого равен двум. Это число заведомо не представимо в виде дроби. В самом деле, если бы оно выражалось рациональным числом, то, сократив числитель и знаменатель на общие множители (если таковые есть), мы в итоге получили бы значение длины диагонали в виде *a/в*, где *a* и *в* — целые числа, не имеющие общих множителей. Необходимо должно выполняться равенство:

$$(a/b)^2 = 2. \text{ Значит, } a^2 = 2b^2.$$

Теперь обсудим последнее соотношение. Квадрат числителя нашей дроби, согласно этому соотношению, является четным числом. Но значит, и сам числитель — четный, ибо если бы он был нечетным, то и его квадрат представлял бы собою нечетное число. Следовательно, можно написать $a = 2c$, где c — какое-то число, уже не обязательно четное. Подставив такое выражение для a в наше равенство, мы получим: $4c^2 = 2b^2$. Сократим обе части на два: $2c^2 = b^2$. Отсюда явствует, что число b^2 — четное, а значит, и знаменатель нашей дроби четный. Но если и числитель и знаменатель четные, то дробь можно было бы сократить на двойку, а мы предположили, что все сокращения уже проведены и общих множителей у числителя и знаменателя нет. Противоречие, к которому мы пришли, доказывает существование чисел, не являющихся рациональными.

Эти числа получили название иррациональных. Среди них не только всевозможные корни, но и такие числа, как знаменитое π — отношение длины окружности к ее диаметру и не менее широко известное e — основание натуральных логарифмов. Иррациональные числа лучше всего мыслить себе как бесконечные непериодические десятичные дроби. Ясно, что о вычислении точного значения иррационального числа не может быть речи, зато всякое конкретное число такого рода можно найти с любой заданной степенью округления.

Геометрическая природа математического анализа подсказывает и другую интерпретацию иррациональных чисел. Если мы объединим вместе рациональные и иррациональные числа (вместе они образуют множество действительных чисел — это название как бы подразумевает, что рассматриваются все числа, кроме мнимых) и будем откладывать на прямой отрезки с началом в некоторой выбранной точке и с длинами, выражающимися этими числами, то концы отрезков заполнят всю прямую. Наоборот, любая точка «числовой прямой» или «числовой оси» соответствует определенному рациональному или иррациональному числу. Таким образом, действительные числа соотносятся с точками прямой и в дальнейшем мы будем говорить о числах, как о точках, расположенных на прямой с началом отсчета и с масштабом.

Войдем в абстрактный математический мир, оставив позади несовершенные и приблизительные соотношения реальной жизни. У самого входа мы натолкнемся на бесконечно тонкую прямую, на которой мерцают две бесконечно маленькие точки — нуль и единица. Возьмем бесконечно тонкую иголку и ткнем наобум в числовую ось. В какое число мы попадем — в рациональное или иррациональное?

Оказывается, мы наверняка коснемся числа второго типа. Более того, если бы тыкали наобум нашей иголкой в числовую прямую в течение миллиардов лет, делая триллион уколов в секунду, то никогда мы не попали бы в рациональное число, хотя на любом сколь угодно крошечном отрезке оси этих чисел бесчисленное множество!

Или, представим себе, что участок числовой оси от нуля до единицы обладает массой, допустим, в один грамм. Выбросим все рациональные числа (т. е. соответствующие точки). Масса оставшегося «материала» будет по-прежнему один грамм. Все это происходит потому, что иррациональных чисел значительно больше, чем рациональных, несмотря на то, что и тех и других на любом отрезке бесчисленно много: мощность множества иррациональных чисел больше, чем мощность совокупности дробей. Таким образом, можно сказать, что числовая ось состоит почти целиком из чисел иррациональных, между которыми вклинились некие замечательные, но редкостные числа — рациональные числа.

Но вернемся из удивительного царства математики в наш несовершенный мир. Здесь мы обнаружим, что на практике имеем дело только с рациональными числами. Ведь если мы, например, используем значение числа π, то всегда пишем десятичную дробь с определенным (конечным) числом знаков после запятой — следовательно, берем приближенное рациональное выражение вместо существующего лишь по законам формальной логики иррационального числа — бесконечной непериодической дроби для π. Эту дробь не только нельзя практически написать, но и она просто неизвестна человечеству целиком, ибо самые рьяные фанатики вычислений могли найти для числа π всего несколько десятков, ну сотен знаков после запятой.

Опять хочется обезвредить возможный вопрос читателя: а не объявить ли в таком случае иррациональные числа фантазией заумных теоретиков? Нет, так сделать нельзя — и не из-за погрешности против умозрительных выводов, а даже из чисто практических соображений. Если бы мы уговорились рассматривать лишь конечные десятичные дроби с тысячью знаков после запятой, то рано или поздно это стало бы тормозом, вредным ограничением. Кто поручится, что через несколько лет не возникнет необходимость в отдельных вопросах техники использовать, скажем, две тысячи десятичных знаков?

Иррациональные числа — идеализации, указывающие направление, дающие ключ к все более точному вычислению. Их нельзя написать на бумаге или как-то выразить через конечное число простых операций, но к ним можно приближаться сколь угодно с помощью постижимых для нас рациональных чисел. Итак, снова процесс, динамика, движение, т. е. определяющий дух анализа.

Теперь, после уяснения проблемы чисел, мы можем более конкретно говорить о функциях. Для определенности мы будем рассматривать такие функции, в которых независимая переменная (ее выбор произволен), пробегает все действительные числа, расположенные между нулем и единицей, а другая переменная, называемая обычно функцией, для каждого значения первой переменной принимает вполне определенное значение, являющееся также действительным числом. Выше мы говорили о такой функциональной связи, когда обе переменных имели только по два значения. Впредь такие случаи нас интересовать не будут, это не сфера анализа. Но то, что мы обратились к функциям, заданным на множестве всех действительных чисел от нуля до единицы, вовсе не избавит нас от встречи с «патологическими» случаями, с высшей степенью странности. Вот пример функции-чудовища, придуманный французским математиком Дирихле.

Функция задается следующим правилом: каждому иррациональному значению независимой переменной соответствует значение зависимой переменной, равное нулю; каждому рациональному значению независимой переменной соотносится единица.

Все требования, предъявляемые к функции, здесь выполнены. Как только мы фиксируем первую переменную, сразу же становится известным соответствующее значение второй переменной, причем правило отыскания этого значения исключительно просто, никак невозможно даже ошибиться в вычислении. Удовлетворено и наше дополнительное условие— независимая переменная пробегает всю совокупность действительных чисел от нуля до единицы. Но как изобразить функцию Дирихле графически?

Возьмем какое-нибудь значение независимой переменной, скажем, одну вторую. Соответствующее значение функции — единица. Точка графика ляжет над серединой отрезка числовой оси ноль — единица на единичном расстоянии от этого отрезка. Но одна точка — это еще не график, так как нам нужно нанести все бесчисленное количество точек, отражающих соответствие между переменными. Совокупность точек образует обычно линию, а линию можно нарисовать на бумаге, но это лишь «обычно», а в нашем случае дело обстоит иначе! Как угодно близко к одной второй будут находиться и рациональные, и иррациональные числа, а значит на любом крошечном расстоянии от точки 0,5 числовой оси будут иметься такие точки, где значение функции равно единице и нулю. Рука не сможет нарисовать график функции Дирихле, ибо, изображая его, придется бесконечное число раз отрывать руку от бумаги и переносить острие карандаша сверху вниз и наоборот. Химерическую функцию, о которой мы рассказали, можно увидеть лишь «внутренним взором», поняв принцип ее устройства. Ей соответствует удивительный график: рациональные точки отрезка числовой оси прыгнули вверх на единицу, а таких точек бесконечное количество.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ—ДОСТОИНСТВО

Непредвзятый, хладнокровный и уравновешенный исследователь должен относиться ко всем функциям одинаково. Но это не получается. Математик не в силах избавиться от эмоциональных качеств человека, кроме того, он не забывает, что его наука призвана объяснять окружающий мир. Но где в окружающем мире происходят процессы, описываемые дергающейся функцией Дирихле или подобными уродами? Может быть, такие функции-ублюдки есть не чтое иное, как накладные расходы, которые приходится платить за необходимость идеализации и логической полноты?

Математику не нравится функция Дирихле и он спрашивает себя: сколько существует таких нелепых функций? Как много их по сравнению с «нормальными» функциями, описываемыми, скажем, прямой или параболой?

Ответ оказывается неутешительным. Прыгающих функций неизмеримо больше, чем степенных, плавных, неразрывных. Так же, как непредставимых иррациональных чисел неизмеримо больше, чем всем понятных рациональных. Если бы мы в нашей математической «стране чудес» попали в музей, где на стенках приколоты всевозможные функции, заданные на отрезке нуль — единица, то мы никогда не увидели бы «приличную» функцию — таковые бесследно затерялись бы среди функций, делающих бесконечное число прыжков. Разумеется, и тех и других функций бесконечно много, но мощность множества благообразных функций меньше мощности множества функций бесконечное число раз скачущих.

Единственный разумный выход из положения — сделать следующее заявление. «Мы понимаем, что большинство функций, удовлетворяющих основному определению, изображаются дергающимися графиками и не могут соответствовать каким-то реальным процессам в природе. Поэтому отныне мы будем рассматривать лишь такие функции, которые особо важны для практических целей, сознавая, что тем самым мы сужаем поле нашего исследования. Но сужение это вызвано соображениями здравого смысла».

После этого решения сразу возникает вопрос: а какое же наложить ограничение на функцию, какой предъявить критерий?

Ответ по существу уже подсказан. Снова геометрическими соображениями. Нам не понравилась функция Дирихле главным образом потому, что ее нельзя нарисовать: рука не может прыгать бесконечное число раз. А что рука может сделать легко? Чертить линию, не отрывая карандаша от бумаги, т. е. изображать непрерывную кривую. Вот давайте и рассматривать впредь только те функции, чьи графики представляют собой непрерывные линии.

Анализ произошел не только от геометрии, но и от алгебры. Если бы мы ограничились чисто описательным определением непрерывной функции, то исчезла бы возможность точного числового исследования, т. е. исчисления не было бы. И математик ищет логически ясную формулировку, которая позволила бы не интуитивно, а строго и однозначно устанавливать, является ли данная функция непрерывной или нет.

Отыскивая подходящее определение, используем представление о руке, вычерчивающей непрерывную кривую. Рука направляет острие карандаша от какой-то точки сперва к очень близкой, затем к более удаленной — траектория проходится последовательно, постепенно. Если считать кривую графиком функции, можно утверждать, что при малом изменении независимой переменной функция меняется тоже относительно мало. Но что значит «мало»? По сравнению с чем? Ясно, что написанная фраза не удовлетворяет не только придирчивую математическую логику, но даже и обыденные требования к точности выражения. Поэтому определение непрерывности дается так:

«Функция называется непрерывной в данной точке, если бесконечно малому отклонению независимой переменной от этой точки соответствует бесконечно малое изменение значения функции».

Вспомнив, что такое бесконечно малая величина, можно пересказать определение по-другому: «Если функция непрерывна в точке x_0, то при стремлении независимой переменной к x_0 функция стремится к тому значению, которое она имеет в точке x_0». Это и значит, что, ведя карандаш к заданной точке, мы будем приближаться к ней все ближе и ближе, что расстояние между отправной точкой и конечной будет безгранично сокращаться, что карандаш не будет прыгать в районе заданной точки.

Мы дали определение непрерывности функции в точке. А когда шла речь о проведении линии «не отрывая руки», имелась в виду непрерывность функции на целом отрезке. По причинам чисто логического свойства удобнее исходить из непрерывности именно в точке. Тогда непрерывность на отрезке можно определить так: функция непрерывна на отрезке в том случае, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

Все кажется естественным и простым. На первый взгляд можно подумать, что непрерывность в точке фактически означает следующее: в некоторой окрестности этой точки график функции изображается кусочком линии, нарисованной без отрыва руки. На самом же деле данное выше определение имеет некоторые щели, через которые проникают функции-монстры.

Одну из таких функций открыл великий немецкий математик Бернгард Риман (1826—1866), который был одним из основоположников новых взглядов на пространство и время. Функция Римана похожа на функцию Дирихле, но сходство это чисто внешнее. Вот ее задание: при любом иррациональном значении x (речь идет, как всегда, об отрезке ноль — единица) y равен нулю, при рациональном значении x функция равна единице, деленной на знаменатель несократимой дроби, выражающей x.

Чтобы лучше прочувствовать структуру функции Римана, напишем несколько значений независимой переменной (x) и соответствующих им значений функции (y):

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{3{,}14}$
y	0,1	0,2	0,1	0,2	0,5	0,05	0	$\frac{1}{157}$

Функция эта совершенно удивительна в отношении непрерывности. Оказывается, она непрерывна в любой иррациональной точке и разрывна в любой рациональной. Если вспомнить, что и иррациональные, и рациональные точки расположены на оси бесконечно густо и переплетены между собой, то свойство функции Римана покажется диким и парадоксальным. Но безукоризненная логика подтверждает странное поведение функции. Проследуем же за логикой.

Возьмем какое-то иррациональное значение x. В нем функция равна нулю. Возьмем теперь очень близкое значение x, т. е. «отведем руку чуть-чуть вправо или влево». Мы попадем либо снова на иррациональное значение x, но тогда функция по-прежнему будет равна нулю и требование к непрерывности удовлетворится (рука не прыгнет ни вверх, ни вниз, а останется на числовой оси), либо на рациональное значение. И тут-то выплывает самое главное: рациональное число, расположенное очень близко к иррациональному, обязательно имеет огромный знаменатель. Это ясно из того, что если мы хотим записать бесконечную непериодическую десятичную дробь приближенно, но с очень большой степенью точности (а это и значит взять рациональное число, близкое к иррациональному), мы обязаны взять очень много знаков после запятой. Десятичную дробь можно превратить в простую, но у последней будет большой знаменатель. Теперь, обращаясь к определению функции Римана, мы видим, что в рациональных точках, близких к иррациональной, значение функции будет очень мало, почти нуль (единица, деленная на колоссальный знаменатель!). Таким образом, при легком смещении карандаша вправо или влево он сдвинется вверх или вниз тоже очень ненамного. Функция Римана будет непрерывной в иррациональной точке.

С другой стороны, совершенно очевидна разрывность в рациональной точке. В ней функция имеет какое-то конкретное значение, а сколь угодно близко существуют иррациональные значения x, в которых функция равна нулю. Значит, при отклонении карандаша, находящегося над рациональной точкой, как угодно мало вправо или влево он резко упадет вниз на числовую ось — будет скачок.

Функция Дирихле была разрывна в любой точке отрезка Функция Римана хитрее — она непрерывна в бесконечном числе точек, но и разрывна также в бесконечном числе точек. Ни о какой, конечно, непрерывности на отрезке не может здесь быть и речи. Обе экзотические функции невозможно нарисовать, обе они не соответствуют каким-либо реальным процессам окружающего мира.

Получается, что всякое логически ясное, простое и точное определение (а без таких определений не может существовать анализ) по неизбежности охватывает не только практически интересные для нас случаи, но и целый сонм побочных. Поэтому в исследовании мы должны идти по пути последовательного введения все новых и новых ограничений, накладывать на класс интересующих нас функций все более жесткие условия. Как показывает рассмотрение функции Римана, нет смысла заниматься функциями, которые непрерывны в бесконечном количестве точек отрезка. Нужно, по-видимому, чтобы функция была непрерывна на всем отрезке. Тогда значительная доля «патологии» будет отсечена.

Итак, отыщем на выставке функций тот стенд, на котором красуются функции, непрерывные в любой точке отрезка ноль — единица, и не будем отходить от этого стенда. В виде компенсации за потерю общности мы вправе ожидать появления у нашего суженного класса функций каких-то характерных свойств.

Поясним этот важный вопрос более подробно. Он связан с весьма универсальной проблемой соотношения общего и специального, частного.

Всем со школьной скамьи известен многочлен — выражение, содержащее букву x в целых положительных степенях. Многочлены обладают некоторыми общими свойствами, например степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, и это утверждение справедливо для любого значения x. Мы редко задумываемся над тем, что такое многочлен от x (так мы привыкли к нему), но фактически это есть некая возможность подстановки вместо x любого конкретного числа. Многочлены с буквенной неизвестной нужны, в конечном счете, для того, чтобы подставлять вместо буквы определенное число, т. е. производить специализацию. Но если бы мы всегда рассматривали лишь многочлены в данной точке, то нам не удалось бы изучить черты, присущие всем многочленам сразу. Таким образом, на вопрос, что лучше изучать — общий случай или специализированный, нужно отвечать так: необходимо изучать и то и другое. Чем общée, универсальнее объект, тем он расплывчатее, тем меньше у него индивидуальных качеств, зато эти качества «дороже» — они дают ключ к пониманию природы множества частных объектов. Нужно начинать с общего случая, но останавливаться на нем будет бесплодно, ибо на самом деле существуют лишь конкретные случаи и окончательная цель состоит именно в их разборе. Однако этот разбор нельзя вести, заранее не вооружившись немногочисленными сведениями общего характера.

Анализ идет в точности по этому пути. Сначала рассматриваются функции вообще — любые мыслимые функции. У абстрактной «просто функции» по существу нет никаких свойств — этот объект аморфный, растяжимый, многоликий, призрачный. Бросив взгляд на размытое облако всех функций, математик (верный своему деловому духу) переходит к первой ступени специализации — рассматривает функции, непрерывные на отрезке ноль — единица. Тут уже появляются характерные признаки, которые весьма интересно исследовать.

Мы познакомимся с двумя важнейшими свойствами непрерывных на отрезке функций (любых непрерывных функций, т. е. эти свойства общи для всего класса):

1. Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.

2. Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка есть такая точка, в которой функция равна нулю.

Второе утверждение представляется очевидным: если вы начали рисовать линию, держа карандаш ниже числовой оси, а в конце он оказывается над осью, то где-то вы обязательно пересечете числовую ось. Как раз в этой точке функция будет равна нулю. Правда, математики не могут удовлетвориться таким «доказательством»: ведь само понятие непрерывности определялось не через «руку и карандаш», а чисто аналитически, поэтому и обосновывать второе свойство нужно строже: логически выводя его из формулировки непрерывности на отрезке. Ученые давно уже справились с этой задачей и нашли (правда, довольно громоздкое) безукоризненное оправдание тому заявлению, которое кажется несомненным и так. Для нас сейчас не обязательно следовать за всеми изгибами логической казуистики; мы примем свойство номер 2 без всякого обоснования. Зато нам будет полезно проиллюстрировать это свойство примерами, взятыми из окружающей жизни.

Вы приезжаете на Северный Кавказ, допустим в Нальчик. План таков: побродить по горам, а затем выйти к Черному морю.

Между вашим отправным пунктом (Нальчиком) и конечным (Сухуми) расположен Главный Кавказский хребет, который можно считать бесконечно тонкой прямой, не имеющей ни начала, ни конца. Такая идеализация обоснована, так как хребет достаточно прям и его небольшие изгибы для нас несущественны, а концы хребта расположены за пределами практической достижимости (Апшеронский полуостров и Анапа). Расстояние между вами и хребтом будем считать положительным, если вы находитесь на северной стороне, и отрицательным, если на южной (это тоже обоснованно, так как когда вы перебираетесь на грузинский склон, то хребет уже «позади»). Значит, расстояние это как функция времени удовлетворяет условию пункта 2 — оно задано на определенном временном отрезке (начало и конец отпуска), непрерывно в любой момент времени (ибо скорость вашего передвижения всегда конечна) и принимает на краях отрезка значения противоположных знаков. Следовательно, настанет такой момент, когда вы окажетесь на перевале.

Таких моментов может быть и несколько. Если вы пересекаете хребет, то знак расстояния меняется на противоположный. Поэтому, пересекая хребет $к$ раз, вы окажетесь от него на расстоянии знака $(-1)^{к}$. Отсюда следует, что для того, чтобы оказаться на побережье Черного моря, необходимо пройти нечетное число перевалов. Если же вы захотите провести остаток отпуска на Каспии, то вам придется перевалить хребет четное число раз — два, четыре, шесть и т. д.

То, что мы сейчас говорили, может показаться слишком простым, хотя и наглядно поясняет свойство непрерывной функции. Следующий пример не так прост.

Человек зашел в кафе и сел за круглый столик. Выяснилось, что столик качается — одна ножка не достает до пола. Официантка хотела подложить бумажку, но посетитель остановил ее — он оказался математиком. «Одним только вращением стола вокруг центра,— сказал он,— можно добиться того, что качания не будет. Причем, угол поворота не превысит 90 градусов. Стол будет стоять в той же самой позиции, но совершенно устойчиво».

Посетитель знал свойство непрерывных функций. Он исходил также из предположения, что стол сделан правильно, т. е. все его ножки имеют одинаковую длину, а причиной качания является неровный пол. Вот цепь рассуждений.

Занумеруем ножки, скажем, по часовой стрелке. Не достает до пола ножка № 1. Если слегка надавить на стол, противоположная первой, т. е. третья, ножка тоже поднимется над полом. Если же теперь мысленно немного вдавить ножки № 2 и № 4 в пол, то можно считать расстояние первой пары до пола положительным, а второй — отрицательным. Эти расстояния можно всегда сделать по величине совершенно одинаковыми. При повороте стола на 90 градусов пары противоположных ножек поменяются местами. По свойству непрерывности (считаем, что пол не имеет резких выбоин или выступов) в процессе вращения должен наступить момент, когда оба расстояния станут равными нулю — стол не будет покачиваться. Обращаем внимание, что здесь имеются фактически не две функции (положительное вначале расстояние первой пары и отрицательное вначале расстояние второй пары от пола), а одна — скажем расстояние первой пары от пола. Расстояние второй пары не является независимым, оно равно по величине и противоположно по знаку первому расстоянию. В исходном положении стола первое расстояние имеет знак плюс, в повернутом на четверть оборота положении — знак минус. Значит, в каком-то промежуточном положении расстояние первой пары до пола, а следовательно, и второй пары до пола равно нулю.

Рекомендуем вам проверить второе свойство непрерывных функций при первом же столкновении с качающимся круглым столиком. Разумеется, нужно, чтобы стол был хорошим, а пол плохим. Если на идеально плоском полу стоит столик с подпиленной ножкой, то теорема «не сработает».

Первое свойство непрерывных на отрезке функций доказано немецким математиком Карлом Вейерштрассом (1816—1897), учителем Софьи Ковалевской. Оно означает, что у всякой непрерывной на отрезке функции имеются верхняя и нижняя границы, т. е. такие два числа A и B, первое из которых превосходит любое значение функции на этом отрезке, а второе, наоборот, будет меньше всякого значения функции, в какой бы точке отрезка оно ни бралось. Поскольку все процессы природы непрерывны, теорема Вейерштрасса как бы утверждает, что всякое конкретное явление имеет свое начало и свой конец. Мы удовлетворимся лишь такой «философской» интерпретацией первого свойства и не будем обсуждать его подробно.

Что нас сейчас интересует гораздо больше — это недостатки непрерывных функций, т. е. возможность существования у них «патологических» качеств. Ибо определение непрерывности было формальным и через него контрабандой могли просочиться такие свойства, которые никак не способны отражать истинные соотношения внешнего мира и которые не согласуются с нашим интуитивным представлением о «хорошей» функции.

СЛЕДУЮЩЕЕ УЛУЧШЕНИЕ—ГЛАДКОСТЬ

Думая о тех линиях, которые связаны с окружающими нас процессами, мы в первую очередь вспоминаем различные траектории — кривые движения материальных тел. Эти кривые всегда непрерывны — объект не может исчезнуть в одном месте пространства и затем появиться в другом месте, не пройдя все промежуточные позиции. Однако, кроме непрерывности, траекториям присуще и другое непременное свойство.

По снежной трассе мчится горнолыжник. Если смотреть сверху, то центр тяжести спортсмена будет вычерчивать кривую, которую можно назвать планом движения. План — это по существу проекция перемещения центра тяжести на некую горизонтальную плоскость. Кривая плана непрерывна, даже если лыжник подпрыгивает на буграх и отделяется от склона. Кривая также не может иметь угловых точек — направление движения не может измениться мгновенно. Физик скажет, что этому препятствует инерция материального тела. Каким бы резким ни был поворот при прохождении трассы слалома, линия плана движения обязательно будет иметь закругление, плавный изгиб. Это относится не только к лыжнику, но и ко всякому объекту, движущемуся в пространстве, в частности к руке, ведущей карандаш по листу бумаги. Если мы прочерчиваем линию без остановки, то она не будет иметь угловых точек.

Кривая без изломов называется гладкой. Гладкость — свойство более сильное, чем непрерывность. Всякая гладкая кривая заведомо непрерывна, но лишь часть множества непрерывных кривых обладает гладкостью — дополнительным достоинством. Гладких линий среди непрерывных так же «мало», как целых чисел среди рациональных (хотя и тех и других бесконечное множество и оба множества имеют одинаковую мощность). Тем не менее все графики реальных процессов гладки или имеют лишь конечное число изломов — точек, соответствующих остановкам движущегося тела.

Стремясь найти математически строгое определение гладкости, мы, естественно, приходим к такой формулировке: «линия называется гладкой, если в каждой ее точке существует единственная касательная и если при переходе от всякой точки к бесконечно близкой касательная поворачивается бесконечно мало». В этой фразе заложено представление о плавном изменении направления кривой, ибо направление движения при криволинейной траектории есть не что иное, как направление касательной к этой траектории.

Когда линия ложится на плоскость, на которой нанесены координатные прямые, она перестает быть просто линией — геометрическим объектом и превращается в функцию. Тогда направление касательной в данной точке можно измерять по отношению к оси независимой переменной, к оси x. Удобно ввести в рассмотрение тангенс угла наклона касательной к этой оси и назвать его угловым коэффициентом касательной. В этом случае горизонтальному направлению касательной будет соответствовать коэффициент нуль, вертикальному — бесконечность. Касательная, идущая под углом в 45 градусов слева направо — снизу вверх будет иметь коэффициент единицу, перпендикулярная к ней касательная — коэффициент минус единица и т. д. У функции, изображаемой гладким графиком, угловой коэффициент касательной окажется непрерывной функцией независимой переменной x.

Вот тут мы и подошли к тому, с чего начал Ньютон, когда он только-только принялся за разработку нового метода. Все логические и идейные тонкости, о которых шла речь выше, появились значительно позже — в XVIII веке.

Мысль Ньютона в своем окончательном виде была простой и ясной. Что такое касательная? Предельное положение секущей. Как найти угловой коэффициент касательной? Нужно найти предел углового коэффициента секущей. А как найти угловой коэффициент секущей? Для этого достаточно взять приращение независимой переменной, затем вычислить соответствующее ему приращение функции и поделить второе на первое. Рисунок 6 поясняет сказанное лучше каких бы то ни было комментариев.

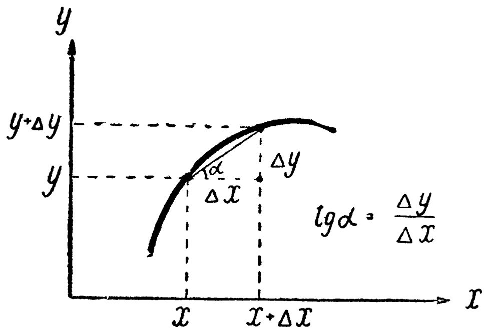


Рис. 6.

Многим читателям, вероятно, остается непонятным смысл формализации такого чисто геометрического термина, как наклон касательной, сведе́ния образности и наглядности к аналитическому отысканию предела.

Идея, оказавшаяся столь плодотворной, состоит в том, что различного рода вычерчивания и измерения заменяются несложными алгебраическими операциями, которые, вдобавок, делаются по стандартным рецептам и которые доступны любому слегка натренированному человеку.

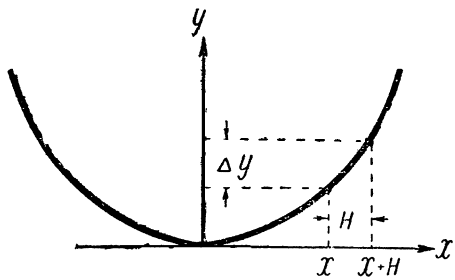


Рис. 7.

Возьмем для примера кривую, называемую параболой. Она изображена на рисунке 7. Ее хорошо знали еще древнегреческие математики. Парабола — это геометрическое место точек, равно удаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директриссой. Если воспользоваться услугами аналитической геометрии и расположить параболу на координатной плоскости (соответствующим образом и с соответствующим подобным изменением размера), то ей будет соответствовать функция $y = x^2$. Наша парабола может трактоваться теперь не как геометрическое место, а как график квадратичной зависимости. Над всякой точкой на оси x имеется какая-то точка параболы, и в этой точке существует единственная касательная. Значит, можно тангенс наклона касательной к оси x считать функцией от x. Найдем эту функцию аналитическим методом.

Вблизи от точки x возьмем произвольную точку $x + H$. Из рисунка видно, что величина H измеряет расстояние между основной точкой и соседней. Насколько же изменяется функция при переходе от x к $x + H$? Чтобы узнать это, нужно из соседнего значения функции вычесть основное. Получится следующее приращение функции:

$$\Delta y = (x + H)^2 - x^2 = 2xH + H^2.$$

Разделим теперь это выражение на H, то есть на приращение аргумента:

$$\frac{\Delta y}{H} = 2x + H.$$

В свете того, что было сказано, ясно: перед нами угловой коэффициент секущей. Коэффициент касательной получится в том случае, если найти предел последнего выражения, устремив H к нулю. Образуется новая функция, произведенная из исходной и названная поэтому производной функцией. Производная данной функции обозначается по-разному; в последнее время чаще всего употребляется для нее значок «штрих». Вот как можно записать тот результат, к которому мы пришли только что:

$$(x^2)' = 2x.$$

Подставляя вместо x любое значение, мы найдем угловой коэффициент касательной в любой точке, вернее, над любой точкой горизонтальной оси. Например, значению $x = 1/2$ соответствует единичная производная, т. е. касательная к параболе над точкой $1/2$ наклонена к оси x под углом 45 градусов. Если бы вы вычертили кривую с величайшей тщательностью и аккуратностью, вы могли бы убедиться с помощью транспортира, что это действительно так. Но было бы затрачено очень много времени. А формальное нахождение производной занимает секунду-две. Не порывая с наглядностью, методы анализа в то же время используют все преимущества числового расчета.

Для очень многих известных функций легко вычислить производные функции по раз навсегда установленным правилам. Мы не будем рассказывать об этих правилах, ибо такой разговор уместнее был бы не в брошюре «Математический анализ», а в брошюре «Как пользоваться математическим анализом». Упомянем лишь, что удобные аналитические выражения производных получаются для степенных, показательных, логарифмических и тригонометрических функций, а также для комбинаций перечисленных функций. Правда, если комбинация достаточно сложна, скажем, взят арктангенс от логарифма синуса многочлена, то отыскание производной потребует длительных усилий. Можно специально придумать такую сложную функцию, составленную из перечисленных элементарных, что даже опытный математик будет искать производную полдня. Но нас интересует не то, как найти производную, а есть ли производная у данной функции во всех точках отрезка, или, как говорят, является ли функция дифференцируемой на отрезке.

Если является, то неизбежно должны обнаружиться дополнительные по сравнению с непрерывными функциями свойства. Ведь дифференцируемость (наличие производной) — качество, включающее в себя непрерывность, но выходящее за ее рамки. Дифференцируемая функция «лучше» непрерывной. Функции, обладающие производной, составляют лишь часть непрерывных функций, специальный класс внутри более общего класса. Великие математики XVIII века (в основном французы) установили, какие свойства должны быть присущи всем дифференцируемым на отрезке функциям, независимо от того, насколько технически легко или трудно найти производную функции.

Первое из этих свойств назвали в честь математика XVII века Пьера Ферма (1601—1665), хотя он еще не знал нового метода исследования функций и сформулировал свою теорему не в том виде, в каком она приводится сейчас. Прославившийся совсем другой теоремой (из области теории решения уравнений в целых числах), так называемой Великой теоремой Ферма, которую, кстати сказать, по сей день не могут доказать, Ферма занимался также изучением касательных и кривых и здесь обнаружил факт, который переводится на язык анализа следующим образом:

«Если функция в точке максимума (или минимума) имеет производную, то эта производная равна нулю».

Тысячи студентов первых курсов технических вузов перед экзаменами по математике лихорадочно стараются запомнить искусственное аналитическое доказательство теоремы Ферма, хотя геометрическая интерпретация делает вышеприведенное утверждение поразительно очевидным. На самом деле, что значит производная равна нулю? Это значит, что касательная к кривой параллельна оси x, т. е. горизонтальна. В точке максимума возрастание функции сменяется убыванием и касательная в этой точке, разумеется, должна лежать горизонтально. Не сразу ясно, почему в формулировке теоремы есть слова «если функция... имеет производную». Объяснение такое: максимум может достигаться в «угловой точке», а в таких точках нельзя говорить о единственной касательной, т. е. о производной.

Попробуем проиллюстрировать теорему Ферма жизненным примером. Рассмотрим движение высотного реактивного самолета. Мощный двигатель сообщает ему сверхзвуковую скорость и, послушный рулю, он может описывать самые сложные и крутые линии. Однако корпус самолета всегда направлен по касательной к траектории, какой бы извилистой последняя ни была. Таковы законы аэродинамики, которые определяют движение сверхзвукового самолета.

Рядом с летчиком сидит наблюдатель и не отрываясь смотрит на альтиметр. Высота растет, сначала быстро, потом медленнее, потом опять быстро. Стрелка показывает 15 000 *м* и замирает. После этого высота начинает падать. Хоть наблюдатель, поглощенный своим делом, не следил за положением самолета в момент достижения наивысшей точки траектории, он может быть уверенным, что корпус располагался в этот момент горизонтально — сработала теорема Ферма. Не правда ли, результат этот можно было предвидеть и не изучая математического анализа? Но ведь сила точной науки состоит, в частности, в том, что она не вступает в противоречие с очевидными и правильными фактами. Остается только добавить, что мы молчаливо считали траекторию самолета дифференцируемой линией, иначе теорема Ферма не была бы приложима. Почему траектория всякого материального тела, движущегося без остановок, является дифференцируемой, т. е. гладкой, мы объясняли в начале этой главы.

Из простой теоремы Ферма французский математик Ролль развил более интересную теорему:

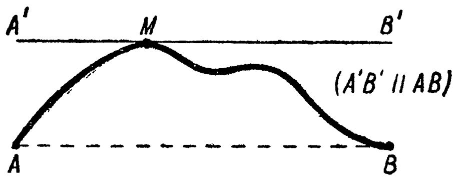
«Если функция дифференцируема на отрезке и на концах этого отрезка принимает одно и то же значение, то обязательно найдется внутри отрезка такая точка, в которой производная равна нулю».

Геометрическая трактовка теоремы Ролля такова: если гладкая линия начинается и кончается на одной и той же горизонтали, то наверняка где-то на линии есть точка, в которой касательная горизонтальна. Рисунок 8 дает наглядную иллюстрацию этого утверждения. Если же применить теорему Ролля к разобранному выше случаю движения самолета, то можно сказать следующее: при условии, что взлетная и посадочная площадки расположены на одной высоте, мы вправе заявить, что в какой-то момент полета корпус самолета был расположен параллельно земной поверхности.

Рисунок 9 показывает, что условие дифференцируемости функции на всем отрезке является необходимым. Тут изображена линия, имеющая производную всюду, кроме одной точки (угловой точки), но как раз в эту несчастливую точку и попал максимум. Не сработала теорета Ферма, а значит, и теорема Ролля.

Если рисунок 8, поясняющий теорему Ролля, наклонить, то касательная уже не будет горизонтальной, но она останется параллельна хорде, соединяющей концевые точки линии (рис. 10). Этот факт подметил Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) и сделал его содержанием теоремы:

«Если функция имеет производную на отрезке, то где-нибудь внутри отрезка неизбежно найдется такая точка, в которой производная равна отношению приращения функции на отрезке к длине этого отрезка».



Теорема Ролля

Рис. 8.

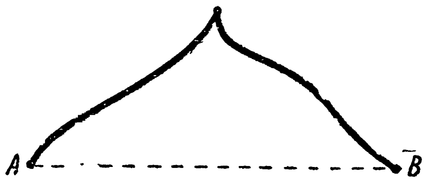
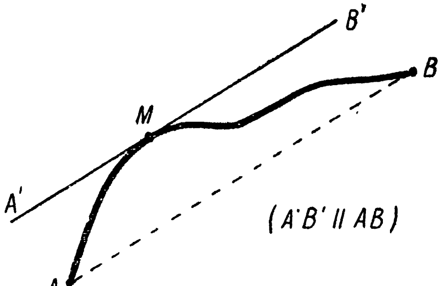


Рис. 9.



Теорема Лагранжа

Рис. 10.

Теорему Лагранжа называют иногда основной теоремой анализа. Она носит также название формулы конечных приращений. Почему? Постараемся это объяснить.

Обозначим приращение функции через Δy, приращение аргумента, т. е. длину отрезка, через Δx, ту точку, о которой говорится в теореме Лагранжа, через c, а производную функцию через $f'(x)$. Тогда можно написать:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) .$$

Умножая обе части равенства на Δx, мы получим:

$$\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x .$$

Здесь в левой части стоит как раз «конечное приращение» — под словом «конечное» подразумевают «не бесконечное малое». Приращение это может быть любым по величине. А равенство остается точным, не приблизительным, только нужно найти подходящую точку c (которая всегда существует). Таким образом, теорема Лагранжа как бы перебрасывает мостик между локальными свойствами (производная в точке) и интегральными — принадлежащими всему отрезку в целом — длиной отрезка и полным приращением функции.

Те из читателей, кто внимательно читал главу о бесконечно малых величинах, почувствовали, вероятно, что математический анализ стремится все время перейти от категорий, свойственных большим, конечным телам или отрезкам, к точечным характеристикам — для этого использовалось понятие предела. Теорема же Лагранжа неожиданно раскрывает противоположную тенденцию анализа. В этом столкновении двух встречных идейных линий нет никакого противоречия. Более того, как раз в единстве диаметрально различных подходов к исследованию одного и того же объекта проявляется истинная диалектическая природа дифференциального исчисления. Поскольку вопрос, который мы затронули, является стержневым для понимания философской сущности анализа, мы поговорим о нем немного подробнее.

В конечном счете нас, разумеется, интересуют интегральные свойства функций. В практике мы сталкиваемся с такими понятиями, как площадь, объем, момент инерции, длина кривой, работа на данном пути, масса тела, количество тепла и т. д. Но отыскание этих величин прямым способом наталкивается на огромные трудности.

Многие помнят, как в школьном курсе математики рассказывалось о нахождении длины окружности и объемов некоторых простых фигур вращения. При этом использовались такие сложные и искусственные приемы, как удвоение числа сторон описанного многоугольника. С помощью цепи довольно запутанных рассуждений цель достигалась; однако весь вычислительный аппарат не имел универсальной ценности, он годился только для окружности и родственных ей линий и фигур.

Величайший математик древнего мира Архимед (287—212 годы до нашей эры) вычислил объем шара и цилиндра. Для этого ему понадобилось изобрести поразительное по своему остроумию построение. Исключительный гений Архимеда обошел также казавшиеся непреодолимыми препятствия на пути к отысканию площади сегмента параболы. Но бóльшего сделать не мог даже Архимед с его уникальной одаренностью. Сейчас же задачи о площадях квадратичной и любой другой степеннóй кривой может решить любой студент второго курса института. Все дело в том, что Архимед и другие ученые доньютоновского периода подходили к интегральным проблемам с помощью интегральных же методов (и лишь в слабой степени, причем, как правило, неосознанно или «подпольно», оперировали понятием предела, нечетко сформулированным), тогда как анализ делает нечто совсем другое —

уходит вначале в изучение локальных свойств, в исследование поведения функции в бесконечно малой окрестности одной точки, а затем, обогащенный результатами, внезапно возвращается к интегральным свойствам. Эффект получается поразительный: самые трудные проблемы, над которыми бились столетиями, решаются «как орешки».

Вот схема «хода», с помощью которого математик как бы обманывает природу и достигает своей цели:

1. Вводится понятие производной. Это понятие чисто локальное, ибо производная есть предел тангенса наклона секущей к оси x при бесконечном стремлении одной точки к другой. Производная в данной точке, казалось бы, никак не связана с поведением функции не только на отрезке, но и в непосредственно соседних точках.

2. Доказывается теорема Ферма. Она все еще локальна, она относится к одной точке (максимума или минимума) и наличие производной требуется лишь в одной точке.

3. Внутри класса дифференцируемых на отрезке функций доказывается формула конечных приращений и локальное понятие производной связывается с интегральными понятиями длины отрезка и полного изменения функции.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Сейчас мы расскажем о формуле, которая для многих представляет собой как бы символ всего анализа. Такое к ней отношение вызвано ее исключительной практической ценностью. Большинство вычислений, прославивших метод математического анализа, делается с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Вспомним, что утверждает теорема Лагранжа. Приращение некоторой функции на данном отрезке равно произведению длины этого отрезка на производную функцию, взятую в какой-то внутренней точке отрезка.

Для удобства будем считать производную функцию как бы основной. Тогда первоначально основную функцию назовем первообразной. Первообразная функция для данной функции — это нечто прямо противоположное производной. Если первая функция является первообразной для второй, это означает, что производная от первой функции есть вторая функция. Например, первообразная для нулевой функции есть постоянная, ибо производная от постоянной всюду равна нулю (это ясно из рисунка 11).

Введя, таким образом, понятие первообразной, мы можем пересказать теорему Лагранжа следующими словами:

«Произведение значения функции, взятого в некоторой средней точке отрезка, на длину этого отрезка равно приращению первообразной на этом отрезке». На рисунке 12 это специально подчеркнуто.

Проделаем еще одну операцию. Разделим наш отрезок на какое-то число более мелких отрезков. К каждому из «дочерних» отрезков можно применить теорему Лагранжа, а если потом подвести итог, то получится следующее утверждение:

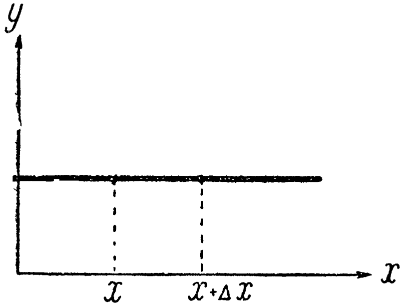
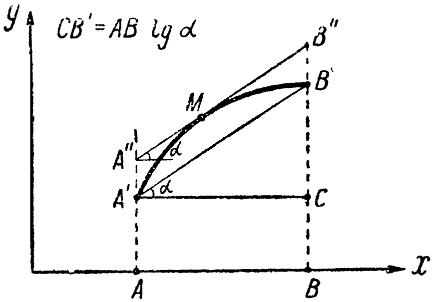


Рис. 11.

«Сумма произведений длин частичных отрезков на соответствующие значения функции (соответствующие — значит «выбранные в некоторой точке внутри соответствующего отрезка) равна полному изменению первообразной на всем отрезке.

Итак, если знать первообразную данной функции, то очень легко найти на первый взгляд довольно искусственно составленную комбинацию: сумму произведений длин маленьких отрезков на значения данной функции, взятые внутри каждого из отрезков. Для этого нужно лишь из значения первообразной, взятого в правом конце, вычесть значение, взятое в левом конце. Проще некуда. Но естественно поинтересоваться, имеет ли смысл это простое вычисление? Что выражает собой упомянутая только что комбинация? Какую интерпретацию можно дать сумме произведений длин подотрезков на значении функции?



Теорема „конечных приращений" Лагранжа

Рис. 12.

Прежде чем дать важнейшие толкования (не одно, а много!) этой сумме, заметим, что высказанное утверждение абсолютно не упоминает числа отрезков и того обстоятельства, равны ли они между собой или нет. Оно остается справедливым при любом количестве частичных отрезков, при любом способе деления полного отрезка на более мелкие части. Оно, конечно, остается верным и в пределе, когда число отрезков будет неограниченно возрастать, а длина всякого из отрезков стремиться к нулю. Такая нечувствительность нашего утверждения к «раскрою» большого отрезка на малые следует из того, что сумма приращений первообразной на частичных отрезках всегда равна полному приращению на всем отрезке и из того, что теорема Лагранжа справедлива для всякого частичного отрезка, каким бы крошечным он ни был.

Теперь о смысле суммы произведений, вернее, о различных ее смыслах.

а. Геометрическая трактовка

Этот взгляд на функцию наиболее для нас привычен. Функция — линия, нарисованная на плоскости. Рассмотрим такую фигуру: сверху она ограничена графиком данной функции, снизу — осью x, с боков — вертикальными прямыми, проходящими через концы отрезка, на котором задана функция. Тогда всякий член суммы, т. е. произведение длины частичного отрезка на высоту ординаты, взятой в какой-то точке этого отрезка, есть не что иное, как площадь прямоугольника. Вся сумма — площадь некой ступенчатой фигуры, заштрихованной на рисунке 13 и «сцепленной» с нашей кри-

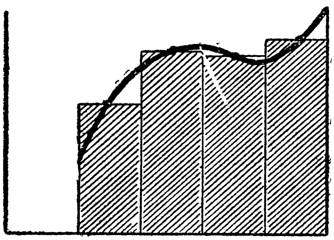


Рис. 13.

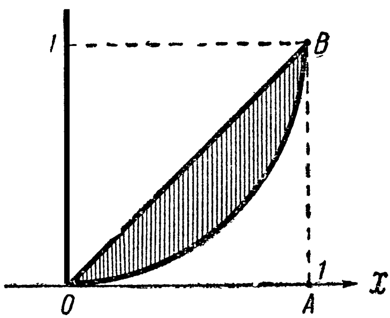


Рис. 14

волинейной фигурой. Если увеличивать число частичных отрезков, то в пределе суммарная площадь всех прямоугольников будет в точности равна площади криволинейной фигуры. Следовательно, чтобы найти площадь этой фигуры, достаточно отыскать первообразную функции, ограничивающей фигуру сверху, и взять приращение первообразной на всем отрезке. Так можно вычислять площади самых разнообразных кусков плоскости. Мы рассмотрим лишь один пример.

Нужно найти площадь сегмента параболы, имеющего вид, показанный на рисунке 14. Нетрудно проверить, что аналитическое уравнение нижней границы фигуры будет $y = x^2$, а верхней границы $y = x$. Площадь заштрихованной части плоскости равна разности между площадью треугольника АОВ и площадью криволинейной фигуры, лежащей между параболой и осью x. Уменьшаемое, очевидно, равно $^1/_2$. Вычитаемое легко найти из приведенных выше соображений. Для этого необходимо разыскать первообразную для функции $y = x^2$. В анализе существуют детально разработанные рецепты нахождения первообразных для широкого класса функций; мы же приведем готовый результат: первообразная в данном случае есть функция $\frac{1}{3}x^3$. Это легко проверить, найдя производную от $\frac{x^3}{3}$. Посмотрите:

$$\lim_{H\to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+H)^3 - \frac{1}{3}\;x^3}{H} = \lim_{H\to 0} \frac{x^2H + xH^2 + \frac{1}{3}H^3}{H} = x^2 .$$

Значок lim означает операцию взятия предела; под значком указано, что предел вычисляется при стремлении H к нулю.

Теперь ничего не стоит решить поставленную задачу. Из одной второй нужно вычесть приращение функции $y = \frac{x^3}{3}$, взятое между нулем и единицей. Ясно, что это приращение равно одной трети, а значит, площадь сегмента параболы составляет одну шестую. Проблема, которой гениальнейший греческий ученый посвятил столько хитроумной выдумки, решена мгновенно.

6. Механическая трактовка

Пусть независимой переменной служит путь, а функцией — сила, действующая на некое тело вдоль направления пути. Разобьем путь на отдельные участки и умножим длину каждого участка на соответствующее значение силы. Всякое такое произведение представляет собой работу, совершенную на частичном отрезке. Если перейти к пределу, получим, что разность первообразных силовой функции в конце и начале пути дает полную работу, проделанную данной силой.

В случае взаимодействия двух точечных электрических зарядов, а также в случае притяжения двух масс по закону всемирного тяготения сила, приложенная к одному из тел, обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами. Это так называемый кулоновский тип взаимодействия, очень распространенный в природе. Чрезвычайно ценно уметь находить энергию перемещения тела в поле кулоновского вида. Такое умение обеспечивается анализом.

Силу можно записать в форме функции $y = \frac{\kappa}{x^2}$, где κ — некий коэффициент (зависящий от характера поля, от масс или зарядов и т. д.), а x — расстояние от неподвижного тела до двигающегося. Перемещение происходит по прямой линии; первоначальное расстояние между телами x_1, конечное x_2.

Первообразной для функции κ/x^2 служит функция $-\kappa/x$. Мы рекомендуем читателю убедиться в этом, надеясь, что сказанное выше дало уже достаточную базу для самостоятельности.

После разыскания первообразной уже легко найти работу перемещения нашего тела. Она равна:

$$U = \kappa \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right).$$

в. Тепловая трактовка

Данной функцией пусть служит мощность теплового излучения. При некоторых условиях она пропорциональна четвертой степени температуры тела (так называемый закон Стефана—Больцмана). Следовательно, если обозначить мощность буквой P, можно написать: $P = \kappa T^4 \cdot \kappa$ — постоянный коэффициент.

Пусть, далее, мы знаем, что температура меняется по заданному закону. Можно ли найти полную потерю телом тепла, происшедшую между двумя моментами времени t_1 и t_2? Конечно, можно. Для этого нужно рассматривать температуру как функцию времени, считая последнее независимой переменной. Разделив весь временной интервал на короткие промежутки и умножив длительность каждого промежутка на нужное значение мощности излучения, а затем сложив все полученные произведения и взяв соответствующий предел, мы как раз получим полное количество потерянного телом тепла. С другой стороны, эта же величина равна разности значений первообразной функции мощности, взятых в конце и начале полного временного отрезка. В тех случаях, когда первообразная отыскивается без труда, задача решается в минуту.

Один из распространенных случаев — равномерное остывание. Такого остывания по существу не бывает, но при любом законе уменьшения температуры тела в узких пределах времени можно считать, что закон этот выражается прямой линией. Если в нулевой момент времени температура была T_0, а в момент t_1 она стала равной T_1, то при принятом упрощении можно написать следующую формулу, выражающую зависимость температуры от времени:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\,\frac{t}{t_1}.$$

(Легко убедиться, что при $t = 0$ температура будет равна T_0, а при $t = t_1 - T_1$). Обозначив для удобства $\frac{T_1 - T_0}{t_1}$ через α, мы придем к соотношению:

$$P = \kappa T^4 = \kappa (T_0 + \alpha t)^4 =$$
$$= \kappa[T_0^4 + 4T_0^3\alpha t + 6T_0^2\alpha^2 t^2 + 4T_0\alpha^3 t^3 + \alpha^4 t^4].$$

Читатель догадался, конечно, что мы применили формулу бинома Ньютона. Чтобы, далее, найти первообразную функции мощности излучения, воспользуемся такими правилами: постоянные множители при функции механически переносятся в виде постоянных множителей при первообразной; первообразная для любой степенной функции x^n есть функция $\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ (последнее правило, кстати говоря, уже встречалось в частных случаях). Учтя это, легко напишем первообразную для P:

$$F(t) = \kappa [T_0^4 t + 2T_0^3 \alpha t + 2T_0^2 \alpha^2 t^3 + T_0 \alpha^3 t^4 + \frac{\alpha^4 t^5}{5}].$$

Чтобы найти полную потерю тепла за время t_1, нужно взять приращение написанной функции между моментами $t = 0$ и $t = t_1$. Для этого в последнее выражение вместо t нужно подставить t_1 (так как в нулевой момент времени первообразная равна нулю). Проведя обратную замену α через начальную и конечную температуры и сделав все возможные упрощения, мы получим весьма красивое выражение для полного потерянного телом тепла:

$$Q = \frac{kt_1}{5} [T_0^4 + T_0^3 T_1 + T_0^2 T_1^2 + T_0 T_1^3 + T_1^4].$$

Интересно косвенно проверить правильность полученного результата: ведь заведомо известно, что если температура тела будет постоянна, то потеря тепла окажется равной $\kappa t_1 T_0^4$ — произведению мощности излучения на время остывания. Из нашей формулы этот результат вытекает, ибо мы должны положить $T_1 = T_0$ и тогда в квадратной скобке образуются пять одинаковых слагаемых. Пятерки числителя и знаменателя сократятся, и мы придем как раз к тому, что предвидели заранее. Нужно добавить, что совершенно непостижимо, как можно было бы решить задачу о потере тепла в разобранном случае без услуг математического анализа.

г. Электротехническая трактовка

Представим себе, что имеется конденсатор заданной емкости, который заряжается переменным током. Как известно, закон изменения переменного тока от времени можно записать таким образом: $i = i_0 \cdot \sin\omega t$, где i_0 — амплитуда тока, а ω — его циклическая частота. Период, т. е. отрезок времени, в течение которого происходит полный цикл изменения тока (после этого все повторяется), связан с частотой соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Можно ли узнать, какой потенциал будет на конденсаторе, если заряжать его в течение полупериода?

В первую очередь нужно найти заряд, полученный конденсатором, ибо потенциал равен частному от деления заряда на емкость. Заряд же, в свою очередь, можно разбить на сумму маленьких зарядов, получаемых конденсатором за маленькие отрезки времени. Каждый из этих зарядов равен произведению величины тока, текущего в данный момент, на интервал времени, в течение которого можно пренебречь изменением тока. Пренебрежение будет тем более обоснованным, чем на более мелкие отрезки мы раздробим временной интервал. Точное значение полного заряда получится, если перейти к пределу суммы произведений временных отрезков на токи при стремлении отрезков к нулю. Но тогда заряд будет равен приращению первообразной функции тока на всем отрезке. Знакомая ситуация!

Осталось найти первообразную для функции $i_0 \cdot \sin\omega t$. Для тех, кто освоил технику анализа, эта задача не представляет никакого труда. Нужная первообразная равна $-\frac{i_0}{\omega}\cos\omega t$. Соответственно, полный заряд конденсатора будет равен разности двух значений данной первообразной: в конце полупериода и в нулевой момент. Следовательно, нужно вместо t подставить сначала $\frac{\pi}{\omega}$, затем нуль и вычесть вторую величину из первой. Учитывая, что косинус π есть минус единица, а косинус нуля — единица, придем к выражению для заряда:

$$q = \frac{2i_0}{\omega}$$

После этого сразу можно написать значение потенциала заряженного конденсатора:

$$U = \frac{2i_0}{\omega C}$$

(C — емкость).

Можно было бы продолжать наши «трактовки» практически неограниченно. Во всех областях физики, техники, химии, статистики, экономики, планирования и т. д. на каждом шагу появляется необходимость вычислять сумму произведений значений функции на соответствующие маленькие длины отрезков оси независимой переменной и переходить к пределу в такой сумме. Почему же это так часто нужно делать? Да потому, что часто приходится сталкиваться с произведением двух величин.

То, что мы сказали сейчас,— не парадокс и не афоризм. Подумайте-ка: путь есть произведение скорости на время, это мы заучили с детства. Но так ли? Так лишь в том случае, если скорость постоянна. А если она все время меняется? Тогда сразу же вылезет сумма произведений. Работа есть произведению силы на путь. Осторожно! Это справедливо только для постоянной силы или же для маленького отрезка, на котором сила не успевает существенно измениться. Для протяженного пути нужно складывать разные маленькие работы и получать одну общую работу. Как это делается, мы уже видели.

Короче говоря, любая величина, являющаяся при «чистых» условиях произведением двух других величин, в условиях, «близких к натуральным», должна вычисляться как предел суммы произведений. Отсюда ясна колоссальная роль такого предела.

В математике мы отвлекаемся от сущности величин. Мы говорим: имеется функция $f(x)$ и имеется отрезок оси x с началом в точке x_1 и с концом в точке x_2. Разобьем отрезок на части, внутри каждой части возьмем значение функции, умножим его на длину отрезочка, все такие произведения сложим и перейдем к пределу. Полученную величину назовем «определенным интегралом от функции $f(x)$ по данному отрезку» и введем для этого важнейшего понятия особый знак или символ:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Вытянутый крючочек, обозначающий интеграл,— деформированная греческая буква Σ или латинская буква S — начальная буква слова «сумма». dx пишется как бы для напоминания о том, что интеграл получается как предел суммы произведений значений функции на длины отрезочков Δx. Греческой литерой дельта принято обозначать малую величину; по некоторым причинам Δx перешло в dx.

А теперь вспомним о конкретном способе вычисления определенного интеграла. Обозначив первообразную функции $f(x)$ и через $F(x)$, мы можем описать этот способ в форме предельно лаконичного рецепта:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Это знаменитая формула Ньютона — Лейбница, которая производит при первом с ней знакомстве впечатление чего-то магического. Именно она, являясь логическим завершением теоремы Лагранжа, протягивает надежную сцепку между точечной, предельной характеристикой функции (ее первообразной) и характеристикой функции на целом отрезке (определенным интегралом). Вот это и воспринимается сперва как «колдовство» — откуда, мол, первообразная на концах отрезка «знает», сколько набежало величины суммы внутри отрезка? Но при более глубоком размышлении приходишь к выводу, что она не может этого «не знать»: ведь если бы функция внутри отрезка была другой, то вся первообразная тоже была бы другой, а значит и ее концевые значения были бы другими.

Как бы там ни было, формула Ньютона — Лейбница может быть причислена к наиболее выдающимся открытиям человеческой мысли. Результат, около которого ощупью бродил великий Архимед и который был получен лишь спустя много столетий, буквально перевернул всю вычислительную технику, в тысячи раз расширил круг решаемых задач, сделал математику мощнейшим орудием воздействия на природу. Вот бы подсказать формулу Ньютона — Лейбница древнегреческим геометрам — насколько бы раньше начался век точных наук! Однако такое пожелание имеет совершенно маниловский характер — эллинам открыть анализ было невозможно. Разве дело в хитрости ума? Архимед, вероятно, в математическом отношении был одарен значительно больше, чем Ньютон. Но во время Архимеда не было аналитической геометрии, не было развитой алгебры, теории о корнях многочленов и т. д. Перепрыгнуть логические трещины и обойтись без соответствующего аппарата не дано даже первоклассным гениям. Поэтому, хоть сиракузский колосс науки, казалось бы, должен был вот-вот открыть анализ бесконечно малых (если бы, скажем, его не убили воины Марцелла), все же путь к этому открытию был далеким — надо было навести мосты промежуточных теоретических построений.

ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ; АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вернемся, однако, к вопросу, который связан с наиболее наглядными понятиями математики — к исследованию кривых.

Как мы знаем, гладкая кривая выражается функцией, имеющей непрерывную первую производную. Гладкость — свойство хорошо понятное. Следовательно, и непрерывность первой производной имеет ясный геометрический смысл.

Сделаем следующий шаг и поинтересуемся, что же содержит в себе непрерывность второй производной? Под второй производной, конечно, мы подразумеваем производную от производной функции.

Чтобы уяснить себе значение производной от производной, рассмотрим линейную функцию, то есть прямую зависимость y от x. Эта зависимость графически изображается прямой линией. Первая производная (просто производная), как мы знаем, есть тангенс угла наклона касательной к кривой в данной точке к оси x. В случае линейной зависимости упомянутый тангенс является постоянным, т. е. производная во всех точках одна и та же. Но тогда вторая производная будет равна нулю на всем отрезке.

Если же линия не является прямой, если она «загибается», то вторая производная уже не будет равна нулю. Давайте посмотрим, почему это так.

Линия, не будучи прямой, обязательно уходит от своей касательной вниз или вверх. В первом случае мы говорим, что кривая выпукла, во втором — что она вогнута. Разумеется, выпуклость и вогнутость могут взаимно сменять друг друга при переходе от одних участков отрезка к другим. Поэтому, характеризуя поведение линии по отношению к своей касательной, нужно говорить об окрестности какой-то определенной точки. Иными словами, выпуклость и вогнутость — локальные свойства.

Итак, пусть кривая в данной точке выпукла. Значит, она убегает от касательной вниз. А можно сказать еще и так: касательная, проведенная к кривой в правой соседней точке, будет иметь меньший наклон к оси x, чем «основная касатель-

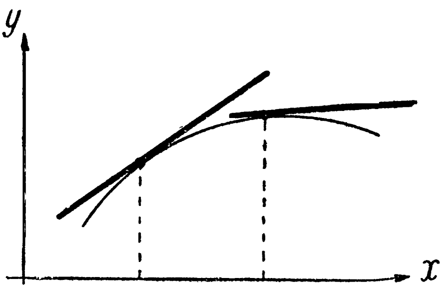


Рис. 15.

ная», а касательная в левой близлежащей точке — бóльший, т. е. при движении точки касания слева направо (в сторону возрастающих x) касательная вращается по часовой стрелке (рис. 15).

Производная в этом случае будет уменьшаться, ибо наклон касательной к оси x уменьшается. Но теперь будем рассматривать производную функцию как самостоятельную и найдем ее производную. Таковая функция окажется отрицательной, так как касательная к производной линии расположится во второй и четвертой четвертях, где тангенс имеет знак минус.

Точно таким же способом можно было бы установить, что при наличии вогнутости в какой-то точке кривой, вторая производная окажется положительной. Следовательно, знак второй производной характеризует направление изгиба линии. Этот вывод и составляет содержание так называемого «правила дождя», придуманного безвестным, но остроумным студентом для лучшего запоминания необходимого на экзамене утверждения: «Если линия вогнута, то льющийся сверху дождь будет накапливаться в прогибе, и наберется много воды — вторая производная положительна. Если линия выпукла — дождь будет стекать, воды не будет — вторая производная отрицательна». Надо признать, что это мнемоническое правило чрезвычайно легко запоминается благодаря своей образности и, вероятно, является более удачным, чем стишки, сочиненные для запоминания десятичных знаков числа π (кто и шутя и скоро пожелает...).

Итак, знак второй производной говорит о том, в какую сторону от касательной убегает линия. А о чем свидетельствует величина второй производной? Естественно предположить: о скорости этого убегания. Так оно и есть на самом деле. Чем резче уходит линия от прямой, тем резче будет изменяться ее первая производная, а значит, тем больше будет абсолютная величина второй производной.

Здесь нам придется познакомиться с еще одним понятием математики — с кривизной линии. Пугаться этого нового термина не стоит, ибо его смысл очень прост. Кривизна измеряет быстроту ухода линии от своей касательной, показывает степень «непрямолинейности» кривой. Ясно, что кривизна прямой всегда равна нулю. Это как раз соответствует тому известному нам факту, что вторая производная линейной функции есть нуль.

С другой стороны, кривизна линии в данной точке, к сожалению, не меряется просто величиной второй производной. Это связано с таким посторонним фактором, как система координат. Одна и та же кривая, нарисованная на координатной плоскости с разным наклоном к оси x, будет иметь в какой-то точке вполне определенное, присущее ей по природе значение кривизны. В то же время вторая производная окажется в двух случаях различной; это связано именно с тем, что понятие производной мы вводили через координатную систему. И тем не менее близким к нулю значениям второй производной соответствует почти прямая, слабо изогнутая линия, а бóльшим значениям — сильно закручивающаяся линия. Поэтому можно утверждать, что абсолютная величина второй производной указывает на величину кривизны.

Очень интересно рассмотреть не саму кривизну, а обратную ее величину. Последняя будет равна бесконечности для прямой и будет очень мала для сильно завивающейся линии. Вспомним теперь, что радиус мало искривленной окружности очень велик, а радиус круто заворачивающейся окружности очень мал. Нельзя ли кривизну любой линии в данной точке сравнивать с кривизной окружности и радиусом последней измерять величину, обратную кривизне?

Оказывается, это сделать можно и не только можно, но и весьма полезно. При этом кривизна как бы приводится к стандартной кривой. Делается это так: на линии берутся три точки — основная и две соседние. Через всякие три точки всегда можно провести единственную окружность. Проведем ее. Затем начнем двигать соседние точки по кривой, приближая их к основной точке, остающейся неподвижной. Ясно, что окружность будет при этом «дышать» — увеличиваться и уменьшаться, слегка покачиваться и т. д. В пределе же она займет определенное положение и ее радиус станет также определенным, как видно из рисунка 16. Этот радиус называется радиусом кривизны линии в данной точке и является величиной, обратной кривизне (т. е. единица, деленная на радиус кривизны, есть кривизна).

Нетрудно придать радиусу кривизны и механическое толкование. Представьте себе поезд, мчащийся по загибающе-

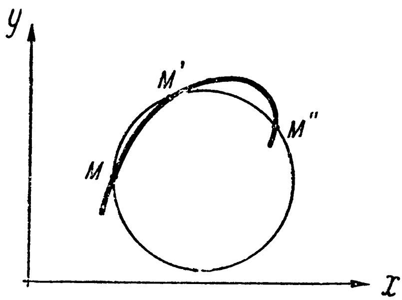


Рис. 16

муся рельсовому пути. Вас прижимает к стене вагона инерционная центробежная сила. Так вот, точно такая же сила возникла бы в том случае, если бы поезд двигался с такой же скоростью по окружности, с радиусом, равным радиусу кривизны пути в данной точке. Эта окружность называется кругом кривизны данной линии в данной точке. Недоразумения, связанного с тем, что окружность называется кругом (обычно в геометрии принято называть кругом часть плоскости, находящуюся внутри окружности), легко избежать, если помнить о том, что все термины условны, что мы могли бы назвать производную, кривизну и любое другое математическое понятие любым словом, только нужно было бы придерживаться этого наименования впредь.

Ясно, что круг кривизны прилегает к кривой «плотнее», чем касательная. Говорят, что круг кривизны и кривая имеют касание второго порядка. Под этим понимают вот что: если расстояние между линией и ее касательной стремится к нулю при приближении x к абсциссе касания, то расстояние между кругом кривизны и линией стремится к нулю быстрее, т. е. отношение второго расстояния к первому стремится к нулю.

На окружности кривизна постоянна, так как она измеряется обратным радиусом. На других кривых кривизна меняется от точки к точке, причем, как правило, она или возрастает или убывает. Лишь в исключительных точках кривизна достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Например, у параболы самое большое значение кривизны достигается в ее вершине, а наименьшего значения нет вообще — парабола неограниченно распрямляется при удалении от вершины. У эллипса в двух точках — в вершинах большой оси — кривизна наибольшая, в двух точках — вершинах малой оси — наименьшая. Так как кривизна почти всюду меняется в одну определенную сторону, то выходит, что круг кривизны почти всегда пересекает кривую, т. е. располагается, как показано на рисунке 17. Любопытно, что даже очень знающие математики, объясняя на лекциях, что̀ такое кривизна, рисуют на доске круг кривизны с одной стороны от кривой. Это, вообще

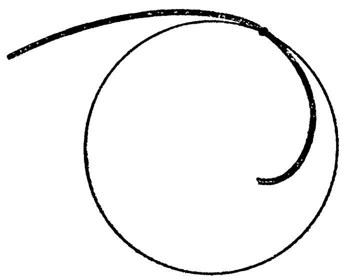


Рис. 17.

говоря, неправильно, ибо при монотонном изменении кривизны кривая сначала отстанет от круга кривизны (кривизна которого постоянна!), а затем обгонит его по степени закрученности, т. е. распространенный рисунок иллюстрирует исключительный случай, а не типичную ситуацию.

Поскольку вторая производная связана с кривизной линии, то легко ответить на вопрос: какое же геометрическое свойство присуще графику функции с непрерывной второй производной? Будем называть такую функцию дважды дифференцируемой, хотя это, строго говоря, не соответствует каноническим определениям. Дважды дифференцируемая функция, как мы можем теперь догадаться, обладает непрерывно меняющейся кривизной. Эта функция «лучше», чем однажды дифференцируемая функция, ее поведение более плавно. Чтобы подчеркнуть улучшение кривой при появлении непрерывной второй производной, мы сравним две линии, из которых первая соответствует однажды дифференцируемой функции, а вторая — дважды дифференцируемой.

Сначала проведем чисто зрительное сравнение. Лишь однажды дифференцируемую функцию изображает овал — известная в начертательной геометрии фигура, представляющая собой сопряжение окружностей разного радиуса. Так как сопряжение выполнено гладко, без угловых точек, первая производная меняется непрерывно, т. е. касательная к овалу поворачивается без скачков. Но кривизна в сопряженных окружностях разная, и она изменяется в точках сопряжения резко моментально, мгновенно. Слева от этой точки кривизна (а следовательно, и вторая производная) имеет одну величину, а справа — совершенно другую. Вторая производная имеет здесь разрыв. А вот у эллипса таких разрывов нет, кривизна на нем переходит от наибольшего значения к наименьшему плавно, постепенно.

Посмотрите на нарисованные на обложке овал и эллипс. Какое явное различие! Насколько линия эллипса благороднее, мягче, приятнее для глаза. В овале раздражают точки сопряжения, они бросаются в глаза, «вылезают» из кривой. Хочется как-то сгладить их, выпрямить что-то, ликвидировать шероховатость линии. В то же время эллипс безукоризнен, его очертания совершенны и красивы.

В древности придавали очень большое значение «совершенности» линии. Вся система эпициклов и диферентов, которая так загромождала астрономию, понадобилась лишь для того, чтобы свести движения планет к комбинации кругов. Почему именно кругов? Да просто считалось, что круг — совершенная фигура, а небесные тела не могут описывать несовершенные траектории. Когда Кеплер открыл свои великие законы, он переломил установившиеся взгляды и ввел в число «небесных» кривых эллипс. Сейчас мы уже привыкли к этой линии, и она иногда кажется даже «лучше» окружности. Нам представляется естественным, что все планеты, кометы и искусственные спутники движутся по эллипсам. Но вот если бы вам сказали, что небесное тело путешествует по овалу, тут вы бы возмутились. Вам показалось бы это маловероятным, ибо овал — искусственная кривая, нечто надуманное, ненатуральное. Вдумавшись в причины своего возмущения глубже, вы пришли бы к выводу, что вас смущают точки сопряжения овала. Интуитивно вы чувствовали, что в этих точках движущемуся небесному телу будет «плохо». А как плохо? Попробуем ответить на этот вопрос и тем самым дать механическую интерпретацию повторной дифференцируемости.

Если тело движется с некоторой скоростью по определенной траектории, то на его ускорение «работает» избыточная над равновесной сила. Этим мы хотим сказать, что при наличии многих сил различного происхождения, действующих на тело, происходит частичная компенсация этих сил, но в некоторых случаях что-то остается некомпенсированным. Это «что-то», а вернее сказать, алгебраическая сумма всех сил, вызывает ускорение тела, производит разгон. Лучше всего вообразить, что тело скользит по идеально скользкой горке, сделанной из абсолютно твердого, недеформируемого материала. Тогда в число определяющих движение сил нужно включить реакцию опоры, т. е. давление на тело со стороны поверхности горки. Оно, по третьему закону механики, равно давлению на поверхность со стороны тела, т. е. центробежной силе. Последняя же есть частное от деления квадрата скорости на радиус кривизны (еще нужно умножить на массу, но это для нас несущественно).

Центробежная сила или реакция опоры обратно пропорциональна радиусу кривизны, т. е. прямо пропорциональна кривизне. Следовательно, если тело будет скользить по горке, сделанной в форме овала, то при пересечении точки сопряжения давление на поверхность изменится скачком. Если наша горка будет реальной, а не идеальной, то в точках сопряжения шарик будет погромыхивать, ибо естественный прогиб поверхности, возникающий в результате давления шарика, в этих точках мгновенно изменится.

Что же касается небесного тела, то там дело обстоит еще яснее. На него действует всего одна сила — притяжение Солнца (или Земли, если тело находится вблизи Земли). Часть этой силы вызывает ускорение в его обычном смысле, т. е. изменение величины скорости тела, а часть «съедается» инерционной центробежной силой. Так как сила тяготения при переходе от одной точки пространства к соседней меняется плавно, то и ее действие должно меняться плавно. Скорость тела не может резко измениться из-за инерционности массы, это мы уже знаем; ускорение же не способно прыгнуть по той причине, что для этого понадобилось бы резкое изменение той составляющей силы, которая направлена по касательной к траектории. Проекция силы тяготения на направление, перпендикулярное к траектории тела, вызывает изгибание пути, создает кривизну траектории. Другими словами, планета не могла бы двигаться по овалу, так как для этого нужно было бы, чтобы гравитационная сила изменялась скачками.

Не только поле тяжести — все известные нам силовые поля имеют свойство непрерывности. Но тогда выходит, что все реальные тела движутся по траекториям, дважды дифференцируемым. Снова мы приходим к выводу о ценности меньшинства: хотя среди дифференцируемых функций лишь малая часть имеет непрерывную вторую производную, нас фактически интересуют только эти «исключительные» функции.

Сам собой напрашивается вопрос: какое же улучшение принесет тройная дифференцируемость, т. е. наличие непрерывной третьей производной? Тут уже нет такого ясного геометрического образа, как в случае второй производной. Однако можно почувствовать значение третьей производной, если вспомнить, что она является производной от второй производной, т. е. измеряет изменение кривизны при переходе от точки к точке. Не величину кривизны, а темп изменения кривизны — вот что характеризует величина третьей производной. Учитывая это, можно сравнить две функции — лишь дважды дифференцируемую и трижды дифференцируемую. Вторая обладает тем свойством, что скорость изменения кривизны не меняется мгновенно на большую величину, что в двух близких точках примерно одинаковый темп нарастания или убывания кривизны. Если же третья производная имеет разрыв, то этот темп испытывает скачок. Заметит ли это глаз? Будет ли разрыв третьей производной производить неприятное впечатление на наш зрительный орган? Это вопрос спорный. Один известный московский математик утверждал, что точки разрыва третьей производной на графике видны. Мы пытались проверить это и тщательно начертили соответствующую кривую. Точка, в которой третья производная скачет (вторая производная у данной функции непрерывна, то есть кривизна линии меняется плавно), была нам известна, но не указывалась испытуемому — он сам должен был определить эту точку. Часть людей отыскивала эту точку по внешнему впечатлению или, во всяком случае, указывала на близкую к ней точку. Некоторые подозревали совсем другую точку. И все, после того как им показывалась истинная точка разрыва, соглашались, что она чем-то «плоха».

Геометрическая интерпретация четвертой производной и дальнейших производных становится совсем трудной. Но для анализа очень важно, чтобы функция имела как можно больше производных. Если производных имеется неограниченное число, функция называется аналитической. Только такие функции по существу рассматриваются в анализе. Только такие функции, в некотором смысле, существуют в природе. У этих функций плавно меняется не только наклон касательной, кривизна и темп изменения кривизны, но и скорость изменения скорости изменения кривизны и т. д. Так математический анализ выяснил вопрос, какую же кривую можно считать «полноценной», соответствующей фундаментальным законам природы.

Анализ бесконечно-малых есть анализ аналитических кривых. По поводу этих кривых можно написать много книг, захватывающе интересных. Чем, например, не поразителен такой факт: если нам известна аналитическая кривая на сколь угодно малом отрезке, то мы можем точно сказать о поведении этой кривой в любом районе вне отрезка.

Но за неимением места нам приходится окончить рассказ о нескольких чертах и способностях математического анализа и перейти к заключению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

До сих пор мы как бы занимались рекламой анализа, показывали то нужное и ценное, что может сделать эта отрасль науки. Мы нигде в этом смысле не перегибали и не перебарщивали, мы даже сказали лишь о малой части того могущества, которым располагает метод анализа бесконечно малых. Читатель, как мы надеемся, убедился в том, что изобретение Ньютона и Лейбница не было бесплодным; что анализ способен решать такие задачи, которые были не под силу эвклидовой геометрии или другим ранним ветвям математики.

Тем не менее математический анализ имеет недостатки. И никто из серьезных ученых сейчас не сомневается в необходимости появления нового метода, в необходимости появления нового Ньютона.

Слабость анализа отчасти объясняется его колоссальной силой. Он настолько развит и распространен, что заглушает все возможные другие пути исследования. Физик, инженер, радиотехник, программист, строитель, гидрограф и бесчисленное множество других специалистов обучены в институтах анализу, привыкли его применять и почувствовали его огромные возможности. Естественно, что когда встает та или иная научная или техническая проблема, всякий думает не над тем, как бы обойтись без анализа, а над тем, как наиболее эффективно применить анализ. Мышление десятков тысяч людей, сталкивающихся с точными науками, настроено по определенному шаблону, от которого чрезвычайно трудно отойти. Действует гигантская инерция анализа, в который тысячи людей вкладывали свой гений на протяжении столетий.

И все же настал момент, когда анализ показывает свою непригодность для некоторых исключительно важных областей естествознания. В первую очередь здесь нужно назвать ядерную физику и физику элементарных частиц. Как точно доказано, микромир не является непрерывным, энергия и положение электронов в атомах меняются скачками и т. д. Не может существовать заряда, не кратного заряду электрона. Энергия от тела к телу передается порциями — квантами. Чтобы описать математически такие процессы, нужен не анализ. Нужен другой аппарат, который не опирался бы на такие понятия, как предел, стремление, бесконечно малая и подобные. Надо думать, что такой аппарат кто-нибудь придумает. Но после этого анализ не выбросят на свалку, ибо его сфера применения останется важной. Он войдет в более богатую, чем сейчас, семью математических дисциплин как равноправный член.

СОДЕРЖАНИЕ

АРНОЛЬД ФЕДОРОВИЧ НИКИФОРОВ

Редактор **И. Б. Файнбойм**
Художеств. редактор **Т. И. Добровольнова**
Техн. редактор **М. Т. Перегудова**
Корректор **Р. В. Савина**
Обложка **И. В. Лаушкина**

Сдано в набор 19.XI-64 г. Подп. к печ. 24.XII-64 г.
Изд. № 7. Формат бум. $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. л. 1,5.
Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,89. А 11070. Цена 9 коп.
Тираж 51 700. Заказ 4106.
Издательство «Знание». Москва, Центр,
Новая пл., д. 3/4.
Типография изд-ва «Знание». Москва, Центр,
Новая пл., д. 3/4.

9 коп.

Индекс
70072

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1965